Н. П. Брусенцов

ПОЛНАЯ СИСТЕМА КАТЕГОРИЧЕСКИХ СИЛЛОГИЗМОВ АРИСТОТЕЛЯ

> Я думаю, что изобретение силлогистической формы есть одно из прекраснейших и даже важнейших открытий человеческого духа.
>
> Г. Лейбниц [1, с. 423]

> ... но и самые счастливые свои идеи он (Лейбниц) принес в жертву желанию вновь получить полностью правила Аристотеля, даже те, которые несовместимы с понятием пустого множества.
>
> Н. Бурбаки [2, с. 306]

> Аристотелевская логика была искажена не только логиками, исходившими из философии, ... но также логиками, исходившими из математики.
>
> Я. Лукасевич [3, с. 188]

Силлогистике Аристотеля 2,3 тыс. лет. Эта первая и, по-видимому, единственная аналитическая система, в которой прямо и адекватно отражена логика естественного языка, установлены принципы корректного в нем рассуждения и доказательства. Основы этой системы, конспективно изложенные на 16 страничках семи начальных глав Первой аналитики [3, с. 119—135], являются предметом многочисленных исследований на протяжении веков и особенно последних десятилетий, когда расширилось применение математических методов и возросло практическое значение логики в связи с созданием автоматических машин.

Нельзя сказать, однако, что эти исследования привели к существенному развитию заложенных Аристотелем основ, справедливее будет согласиться с мнением Канта, что со времен Аристотеля основанная им логика не продвинулась вперед ни на шаг [5, с. 82]. Хуже того, наиболее значительные добавления к силлогистике, введенные как средневековыми логиками (логический квадрат М. Псела), так и в новое время (законы рефлексивности утвердительных посылок — Axx, Ixx) неуместны в системе Аристотеля, причем принятие их заводит ее развитие в тупик. Силлогистика, догматически излагаемая в учебниках формальной логики, противоречива: принятые в ней законы контрадикторной противоположности (исключенного третьего) при правдоподобных истолкованиях смысла посылок несовместимы с законами подчинения частных посылок общим.

Математическая логика, хотя и ведет свое начало от попыток алгебраизации силлогистики, предпринятых Лейбницем, развивается в обход логики Аристотеля. При этом последняя расценивается как логика гуманитариев, недостаточная для обоснования математики и полностью содержащаяся в логике одноместных предикатов [6, с. 81; 7, с. 164]. Оценка убийственная, но не убедительная. Во-первых, люди создали математику и даже матлогику, рассуждая именно тем способом, который отражен в логике Аристотеля. Во-вторых, математическая логика не дала еще адекватного выражения силлогистики в своих исчислениях. К тому же существует мнение, что сделать это невозможно в принципе, потому что силлогистика якобы несовместима с понятием пустого [2, с. 306].

Но стоит ли при наличии корректно построенного аппарата математической логики заниматься воссозданием недосказанного Аристотелем, реконструкцией его древней системы?

Да, стоит. Непреходящее преимущество силлогистики Аристотеля перед иными логическими системами в том, что она основана на конструкциях, полностью заимствованных из естественного языка. Интуитивное понимание смысла этих конструкций формируется в сознании людей в процессе овладения родным языком, и таким образом к силлогистике в той или иной мере причастны все. Совсем не так обстоит дело с искусственными логическими системами. Даже далеко не все математики, специально изучающие математическую логику, вполне постигают, например, смысл символики исчисления предикатов. Большинство ограничивается использованием знаков кванторов вместо «все» и «некоторые» в обычных словесных формулировках.

Пока логика (будь то традиционная или математическая) занималась главным образом своими собственными проблемами, ее эффективность и даже корректность не имели практического значения. Именно поэтому в математической логике оказалось допустимым исказить смысл общих суждений, якобы сделав его «проще и потому полезней» [8, с. 169], а традиционной логике удается сосуществовать с фальшивыми законами контрадикторности в логическом квадрате. Ни первое, ни второе не вызывает катастрофических последствий, потому что в практической деятельности люди руководствуются не формальными правилами логики, а здравым смыслом и данными опыта.

Однако современная практика предъявляет к логике все более серьезные требования в связи с усложнением машин и процессов, а особенно в связи с развитием автоматизации.

Цифровая техника, удовлетворявшаяся до последнего времени булевой алгеброй, осваивает логику предикатов [9]. Эффективность практического применения компьютеризованных систем определяется теперь в значительной и всевозрастающей степени простотой взаимодействия человека с машинами, так сказать, легкостью взаимопонимания.

На первых порах человек пошел на большие уступки машине — приноравливался к ее скудному языку, программировал в двоичных кодах. Однако в дальнейшем неуклонно осуществляется адаптация компьютера к человеку, причем экономически целесообразные затраты на нее постоянно увеличиваются. Очень выгодно сделать компьютер широкодоступным, общающимся с людьми на естественном человеческом языке. Поэтому неперспективно разрабатывать язык общения с машиной на базе логики предикатов, даже если она в техническом отношении проще логики естественного языка. Надо разобраться в том, как устроена последняя и пользоваться ею в качестве единой основы.

Публикуемая статья посвящена описанию расширенной системы категорических умозаключений, построенной в согласии с основами логики человеческого рассуждения, установленными Аристотелем.

1. Уточнение смысла общеутвердительной посылки

Узловым вопросом и пунктом расхождений в современных исследованиях силлогистики является истолкование общих посылок (общих суждений), в частности истолкование общеутвердительной посылки.

Аристотель не дал исчерпывающего определения смысла общих посылок. В Первой аналитике [4, с. 120] сказано, что общая посылка о присущем всем или не присущем ни одному, т. е. когда одно целиком содержится в другом, или иначе: другое сказывается обо всем первом. То, о чем сказывается, Аристотель называет меньшим или подчиненным.

Следовательно, общая посылка выражает отношение, которым связаны друг с другом ее термины и которое обозначается такими словами, как «присущность», или «содержание», или «подчинение». Заметим, что подчинением могут быть связаны друг с другом и посылки: частноутвердительная посылка подчинена общеутвердительной, о чем говорят также, что частная содержится в общей [10, с. 330]. Это впрочем не дает ничего нового для раскрытия смысла интересующего нас отношения: ведь термины определены как абстрактное «что-то», чем в частном случае могут быть и посылки.

Установить точный смысл общих суждений удалось путем определения соответствующих отношений таким образом, чтобы они удовлетворяли всем, указанным для них в силлогистике Аристотеля законам [11, 12]. Пользуясь терминологией Аристотеля, этот смысл наиболее точно можно выразить такими словами, как «вытекает (получается) с необходимостью» или «необходимо следует». Например, общеутвердительная посылка, выражаемая обычно словами «Всякое x есть y», в таком изложении будет звучать, например, так: «Из x с необходимостью следует y».

Конечно, и данную формулировку можно истолковать в разных смыслах, но, исходя из нее, все же легче построить достоверную модель искомого отношения.

Термины, которыми в абстрактных посылках являются буквы, представляют собой, как видно из конкретных примеров, понятия. Понятие мыслится, с одной стороны, как комбинация атрибутов, т. е. более элементарных, «исходных» понятий, а с другой стороны, как совокупность объектов (предметов, явлений) реального мира, обладающих указанной комбинацией атрибутов. Эту совокупность называют классом. Таким образом, термин x, с одной стороны, является понятием x, а с другой стороны, — классом x, содержащим все объекты, подпадающие под понятие x.

Данная двусторонность или двойственность, послужившая поводом для так называемых «содержательной» и «объемной» интерпретаций силлогистики, является одним из источников той двусмысленности, которая по убеждению метаматематиков составляет неисправимый порок естественных языков. Например, что означает словосочетание «ветераны войны и труда»? То ли речь идет о людях, каждый из которых является как ветераном войны, так и ветераном труда, то ли имеется в виду смешанный класс, включающий как ветеранов войны, так и ветеранов труда? Первое из этих толкований соответствует случаю, когда рассматриваемое словосочетание трактуется как атрибут понятия, образованного конъюнкцией атрибутов «ветеран войны» и «ветеран труда». Второе толкование имеет в виду объединение классов «ветераны войны» и «ветераны труда».

Пессимизм заключения математиков о двусмысленности естественных языков следует считать чрезмерным. В действительности язык человека обладает запасом средств, достаточным для однозначного выражения любой мысли, если, конечно, эта мысль не является неопределенной сама по себе. Кроме того, языкам свойственно развиваться и совершенствоваться. Однако, вследствие того что наши мысли далеко не всегда вполне ясны, а также того, что мы не всегда добиваемся недвусмысленного и точного выражения их, многие словосочетания, в том числе широко используемые в логике, имеют расплывчатый смысл или употребляются в различном, нередко противоположном смысле. Примерами могут служить словесные (впрочем, также и алгебраические) выражения отношений в общих посылках и использование одних и тех же слов для обозначения противоположных по смыслу отношений при «содержательном» и «объемном» толкованиях.

Так, приведенное выше слово «подчиненный» («содержится в»), хотя и использовалось в связи с отношением одного и того же типа, в применении к терминам означало отношение, обратное тому, которое затем было выражено этим же словом применительно к посылкам. В случае с терминами подчинение понимается как отношение соответствующих классов: меньший («по объему») термин подчинен большему. В случае с посылками подчинение есть отношение «по содержанию»: частная посылка подчинена общей, т. е. подчиненным является больший класс. Если бы даже в первом случае явно говорили о «подчинении по содержанию», вряд ли эту терминологию можно было признать удовлетворительной. Но говорят в обоих случаях просто о подчинении, будто речь идет в точности об одном и том же. При чем тут двусмысленность языка? Язык нисколько не препятствует тому, чтобы применительно к классам использовалось, скажем, слово «содержится в», а слово «подчиняется» относилось только к случаю подчинения по содержанию. Можно подыскать другие подходящие слова.

Вернемся, однако, к моделированию общеутвердительной посылки, выраженной словами «Из x с необходимостью следует y». На основе изложенной выше интерпретации терминов эти слова можно истолковать путем следующего рассуждения. Следование с необходимостью y из x означает, что все, подпадающее под понятие x, непременно подпадает и под понятие y. Это выражается, с одной стороны, в том, что атрибут понятия y входит в выражение, определяющее понятие x, в качестве конъюнктивного члена. С другой стороны, класс объектов, подпадающих под понятие x (класс x), содержится в классе y. При этом понятие x должно быть непротиворечивым, т. е. класс x должен быть непустым, ибо, допустив противоречие, получаем абсурдное утверждение, будто нечто с необходимостью следует из невозможного (так называемый парадокс материальной импликации). Подлежит исключению также случай тавтологичного понятия y, т. е. когда в классе y содержатся все рассматриваемые объекты. В этом случае y не может с необходимостью следовать из чего-либо, поскольку уже дано как тавтология (второй парадокс материальной импликации). Атрибут y в конъюнкции, определяющей x, в этом случае можно без ущерба опустить.

Теперь нашу модель общеутвердительной посылки можно описать в виде трех условий, которые должны быть удовлетворены совместно.

1. Определение понятия x содержит атрибут понятия y как член конъюнкции.

2. Понятие x непротиворечиво.

3. Понятие y нетавтологично.

В «объемной» трактовке эти требования формулируются соответственно так:

1. Класс x содержится в классе y.

2. Класс x не пуст.

3. Класс y не универсум.

Нетрудно обнаружить, что наша модель общеутвердительной посылки сводит содержание последней к отношению так называемой строгой импликации, поскольку первое из условий есть не что иное, как материальная импликация, а два других устраняют ее парадоксы. Соответствующее истолкование других посылок будет легко получено с помощью рассмотренного ниже алгебраического и графического представления исследуемых отношений, после чего мы убедимся, что данное толкование посылок полностью удовлетворяет законам аристотелевой силлогистики.

2. Алгебраическое представление атрибутов

В процессе рассуждения мы принимаем во внимание конечное число понятий, которым соответствуют классы объектов, определенные на универсуме (вселенной рассмотрения). Понятия и соответствующие классы будем впредь обозначать малыми латинскими буквами x, y, z, ..., которыми обычно обозначаются переменные. В сущности эти буквы и построенные из них алгебраические выражения представляют собой атрибуты понятий и классов, но ради краткости мы говорим «понятие x» или «класс x» вместо «понятие, определенное атрибутом x» или «класс объектов, обладающих атрибутом x».

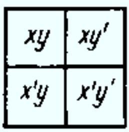

Рис. 1

С каждым понятием связано разбиение универсума на две части, одна из которых является классом объектов, подпадающих под данное понятие, а другая, дополняющая первую до универсума, — классом объектов, не подпадающих под это понятие. На рис. 1 изображена диаграмма Льюиса Кэррола [10, 12], представляющая универсум в виде квадрата разбитым на классы относительно атрибутов x и y. Верхняя половина квадрата представляет класс x, нижняя — класс x' (класс не-x), левая половина — класс y, правая — класс y'. Класс x разбит на подклассы xy и xy', класс x' — на подклассы $x'y$ и $x'y'$, класс y — на xy и $x'y$ и т. д.

Атрибуты подклассов представляют собой конъюнкции атрибутов тех классов, пересечением которых образованы эти подклассы (знак конъюнкции в выражениях атрибутов мы опускаем). Например, подкласс xy' соответствует понятию, образованному совмещением (конъюнкцией) понятий x и не-y, и содержит объекты, обладающие одновременно атрибутами x и y'.

Объединению классов соответствует дизъюнкция их атрибутов. Например: $x \vee y \equiv xy \vee xy' \vee x'y$. Это же можно выразить в виде дополнения до $x'y'$. Действительно, по правилу де Моргана $(x'y')' \equiv x \vee y$.

Таким образом, логика атрибутов есть логика двузначных высказываний с той разницей, что об атрибуте нет смысла говорить «истина» или «ложь», а уместнее сказать «присущ», «не присущ» или «дан», «не дан». Удобнее, впрочем, считать, что атрибут принимает на рассматриваемом объекте значение 1, если он присущ этому объекту, и значение 0, если не присущ. Атрибут противоречивого понятия не присущ ни одному объекту: $x \wedge x' \equiv 0$, атрибут тавтологии присущ всякому: $x \wedge x' \equiv 1$. В «объемной» трактовке: $x \wedge x'$ или 0 — атрибут пустого класса $x \vee x'$, или 1 — атрибут универсума.

Булева алгебра атрибутов позволяет выразить одни понятия через другие, формально установить тождественность или нетождественность выражений, а также некоторые другие отношения, в частности, отношение материальной импликации понятий (отношение включения классов). Однако для выражения составляющего смысл общей посылки следования с необходимостью (строгой импликации) одной двузначной алгебры атрибутов недостаточно. Средства этой алгебры недостаточны и для формулирования более простых, частных посылок.

Дело в том, что буквы и выражения булевой алгебры в каждой конкретной ситуации принимают одно из двух допустимых значений, которые мы интерпретируем как «дано» и «не дано». Если в рассматриваемой ситуации выражение «дано», т. е. принимает значение 1, то представленный им атрибут присущ всем объектам вселенной рассмотрения, или, другими словами, класс, соответствующий отрицанию данного выражения, пуст. Если же выражение атрибута принимает значение 0, то определяемый этим атрибутом класс пуст и все объекты универсума входят в дополнительный класс, который не пуст, поскольку принято, что универсум не пуст: $x \vee x' \equiv 1$. Когда же рассматривается один единственный объект, то атрибут, принимающий значение 1, присущ этому объекту, а атрибут, принимающий значение 0, не присущ, и последнее означает, что объекту присущ атрибут, являющийся отрицанием рассматриваемого. Короче говоря, в алгебре атрибутов строго соблюден принцип Хризиппа «Все или ничего», несовместимый с представлением о «некотором», частичном, являющимся непременной принадлежностью суждений силлогистики.

Недостаточность булевой алгебры атрибутов для выражения отношений, в которых могут находиться представляемые атрибутами классы, вынуждает привлечь дополнительные средства. При этом оказывается достаточно добавить к используемой символике только один символ, обозначающий дизъюнкцию по всем объектам универсума. В качестве этого символа естественно использовать знак дизъюнкции в префиксной записи. Например, запись $\mathbf{V}x$ будет означать дизъюнкцию значений, принимаемых атрибутом x на объектах универсума, распространяющуюся на весь универсум. Это аналогично интегрированию по всему пространству с той разницей, что рассматриваемое пространство (универсум) дискретно, подынтегральная функция двузначна и суммирование заменено дизъюнкцией (логическим сложением). Поскольку универсум предполагается непустым, т. е. содержащим по меньшей мере один объект, значение дизъюнкции $\mathbf{V}x$ определено и может быть одним из двух: если хотя бы один из объектов универсума обладает атрибутом x, то $\mathbf{V}x=1$, в противном случае $\mathbf{V}x=0$.

Очевидно, что $\mathbf{V}x$ принимает значение 0, если класс x пуст, и обратно, $\mathbf{V}x=0$ означает, что класс x пуст. Можно считать, что выражение $\mathbf{V}x$ тождественно словесному выражению «некоторое x существует», а принимаемые им значения 1 и 0 символизируют соответственно утверждение и отрицание «Да» и «Нет». Таким образом, выражение $\mathbf{V}x$ представляет собой двузначную величину и может рассматриваться как булевская переменная. В частности, к нему применима операция отрицания: $(\mathbf{V}x)'$ или в более компактной записи $\mathbf{V}'x$ можно выразить словами: «Не существует ни одного x» или «Класс x пуст». Эти слова принимаются как утверждение, если $\mathbf{V}'x=1$, а в случае $\mathbf{V}'x=0$ утверждается противоположное, т. е. «Некоторое x существует». Следовательно, обе возможных ситуации имеют двойственное алгебраическое представление: факт существования некоторого x выражается как $\mathbf{V}x=1$ или $\mathbf{V}'x=0$, а пустота класса x — как $\mathbf{V}x=0$ или $\mathbf{V}'x=1$.

Содержащийся под знаком дизъюнкции атрибут x может быть функцией некоторых других элементарных атрибутов, т. е. в общем случае это булевское выражение. Пусть данным выражением является конъюнкция xy. Тогда дизъюнкция $\mathbf{V}xy$ означает существование некоторого xy, т. е. объекта, которому присущи атрибуты x и y совместно. Иначе эту ситуацию можно выразить словами «Некоторое x есть y» или «Некоторое y есть x». Отрицание же $\mathbf{V}'xy$ означает пустоту класса xy. Аналогично, смысл дизъюнкции $\mathbf{V}xy'$ выражается словами «Некоторое x есть не-y» или «Некоторое x не есть

y», а ее отрицание $\mathbf{V}'xy'$ означает, что нет такого x, который был бы не-y; дизъюнкция $\mathbf{V}x'y$ тождественна словам «Некоторое не-x есть y» и т. д.

Рассматривая дизъюнкции вида $\mathbf{V}u$, где u — элементарная конъюнкция атрибутов x, y, z, ... и/или их отрицаний, как булевские переменные, представляющие собой *атрибуты ситуации* на универсуме, можно сопоставить каждой из возможных ситуаций ее описание в виде функции этих переменных, которая является конъюнкцией всех функций, принимающих в данной ситуации значение 1 (конъюнктивная нормальная форма), либо дизъюнкцией всех функций, принимающих значение 0 в ситуациях, несовместных с данной (дизъюнктивная нормальная форма).

Например, на универсуме с единственным атрибутом x ситуация, удовлетворяющая хризиппову принципу «Все или ничего», описывается в конъюнктивной нормальной форме формулой

$$(\mathbf{V}x \vee \mathbf{V}x')(\mathbf{V}'x \vee \mathbf{V}'x') = 1$$

и соответственно в дизъюнктивной нормальной форме:

$$\mathbf{V}x\mathbf{V}'x' \vee \mathbf{V}'x\mathbf{V}x' = 1.$$

Всякая ситуация на универсуме может быть представлена совокупностью отношений, связывающих друг с другом рассматриваемые классы. При этом возможны различные представления одной и той же ситуации с использованием отношений различной «арности» (с различным числом мест). На универсуме с n элементарными атрибутами (n буквами) произвольная ситуация может быть представлена, в частности, одним n-арным отношением, формула которого совпадает с формулой данной ситуации.

Число атрибутов ситуации вида $\mathbf{V}u$, где u — элементарная конъюнкция n рассматриваемых на универсуме букв, равно 2^n. Если эти атрибуты ситуации рассматривать как независимые булевские переменные, то число различных ситуаций на универсуме с n буквами будет равно числу различных булевских функций этих переменных, т. е. $2^{2^{2^n}}$. В действительности полной независимости атрибутов ситуации нет: из того, что $x \vee x' \equiv 1$ (универсум не пуст) следует: $\mathbf{V}'x\mathbf{V}'x' \equiv 0$, $\mathbf{V}x \vee \mathbf{V}x' \equiv 1$, $\mathbf{V}x\mathbf{V}'x' \vee \mathbf{V}'x\mathbf{V}x' \equiv \mathbf{V}'x \vee \mathbf{V}'x'$, $\mathbf{V}x\mathbf{V}x' \vee \mathbf{V}'x\mathbf{V}'x' \equiv \mathbf{V}x\mathbf{V}x'$, благодаря чему число ситуаций на универсуме с одной буквой уменьшается с 16 до 12. Соответственно сокращается число ситуаций на универсуме с несколькими буквами.

Правила тождественного преобразования выражений, представляющих ситуации и отношения, сформулированные Кэрролом [10] и уточненные в [12], таковы.

1. Подклассы пустого класса пусты: $\mathbf{V}'x = \mathbf{V}'xy\mathbf{V}'xy'$.

2. Дополнение пустого подкласса до непустого класса непусто: $\mathbf{V}x\mathbf{V}'xy=\mathbf{V}xy'\mathbf{V}'xy$, т. е. если xy пусто, а x не пусто, то xy' непусто.

3. Класс, содержащий непустой подкласс, не пуст: $\mathbf{V}xy=\mathbf{V}x\mathbf{V}xy$, т. е. если дано $\mathbf{V}xy$, то дано и $\mathbf{V}x$ (а также и $\mathbf{V}y$).

Для доказательства этих правил достаточно, помимо законов булевой алгебры, принять только одно тождество, а именно $\mathbf{V}(x\vee y)=\mathbf{V}x\vee\mathbf{V}y$. С помощью этого тождества правила доказываются следующим образом.

1. $\mathbf{V}'x=\mathbf{V}'(xy\vee xy')=(\mathbf{V}xy\vee\mathbf{V}xy')'=\mathbf{V}'xy\mathbf{V}'xy'$.

2. $\mathbf{V}x\mathbf{V}'xy=(\mathbf{V}xy\vee\mathbf{V}xy')\,\mathbf{V}'xy=\mathbf{V}xy'\mathbf{V}'xy$.

3. $\mathbf{V}xy=(\mathbf{V}xy'\vee\mathbf{V}'xy')\,\mathbf{V}xy=(\mathbf{V}xy'\vee\mathbf{V}'xy')\,(\mathbf{V}xy'\vee\mathbf{V}xy)\,\mathbf{V}xy=\mathbf{V}x\mathbf{V}xy$.

4. Алгебраическое представление посылок

Как уже сказано, частноутвердительная посылка «Некоторое x есть y» в алгебре атрибутов ситуации представлена выражением $\mathbf{V}xy$, которое принимает значение 1 в тех ситуациях, в которых эта посылка удовлетворяется («дана»), и значение 0 в случаях, когда известно, что выраженное ею отношение невозможно, исключено. В силу коммутативности конъюнкции xy имеем тождество

$$\mathbf{V}xy=\mathbf{V}yx,$$

— закон обращения частноутвердительной посылки.

Общеутвердительная посылка «Всякое x есть y», истолкованная в смысле отношения строгой импликации, т. е. как конъюнкция трех суждений: «Класс x содержится в классе y», «Класс x не пуст», «Класс y не универсум», выразится так:

$$\mathbf{V}'xy'\mathbf{V}x\mathbf{V}y'.$$

Это выражение с помощью правила 2 можно преобразовать к виду

$$\mathbf{V}'xy'\mathbf{V}xy\mathbf{V}x'y',$$

который явно указывает на то, что в общеутвердительной посылке содержится частноутвердительная посылка $\mathbf{V}xy$, а также частная посылка $\mathbf{V}x'y'$, не входящая в традиционную силлогистику.

Написав формулы общей и частной посылок при всех возможных сочетаниях терминов x, y с и без отрицания, получим полную систему категорических (немодальных) суждений этого рода:

$\mathrm{A}xy=\mathbf{V}'xy'\mathbf{V}x\mathbf{V}y'=\mathbf{V}'xy'\mathbf{V}xy\mathbf{V}x'y'$,

$\mathrm{I}xy=\mathbf{V}xy$,

$\mathrm{E}xy=\mathbf{V}'xy\mathbf{V}x\mathbf{V}y=\mathbf{V}'xy\mathbf{V}xy'\mathbf{V}x'y$,

$\mathrm{O}xy=\mathbf{V}xy'$,

$\tilde{\mathrm{A}}xy=\mathbf{V}'x'y\mathbf{V}x'\mathbf{V}y=\mathbf{V}'x'y\mathbf{V}xy\mathbf{V}x'y'$,
$\tilde{\mathrm{I}}xy=\mathrm{V}x'y'$,
$\tilde{\mathrm{E}}xy=\mathbf{V}'x'y'\mathbf{V}x'\mathbf{V}y'=\mathbf{V}'x'y'\mathbf{V}xy'\mathbf{V}x'y$,
$\tilde{\mathrm{O}}xy=\mathbf{V}x'y$.

Первая четверка формул представляет посылки, обозначаемые в традиционной силлогистике буквами A, I, E, O. Другие четыре формулы выражают отношения, не учтенные традиционной теорией. Для обозначения этих отношений использованы те же буквы A, I, E, O, отмеченные сверху «волной». Буква с волной обозначает отношение, *сопряженное* с одноименным, но без волны, отношением. Отношения R и $\tilde{\mathrm{R}}$ мы называем сопряженными, если $\tilde{\mathrm{R}}(x, y)=\mathrm{R}(x', y')$.

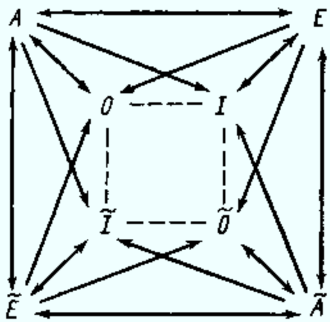

Рис. 2 → — подчинение, ↔ — контрарность, — — — — — — — подконтрарность

Исходя из данного представления категорических посылок, нетрудно установить связывающие их друг с другом отношения. По традиции сформулируем эти отношения в виде силлогистических законов подчинения, контрарности, подконтрарности и обращения.

Подчинение: $\mathrm{A}xy\equiv\mathrm{A}xy\mathrm{I}xy\tilde{\mathrm{I}}xy$, $\tilde{\mathrm{A}}xy\equiv\tilde{\mathrm{A}}xy\tilde{\mathrm{I}}xy\mathrm{I}xy$,
$\mathrm{E}xy\equiv\mathrm{E}xy\mathrm{O}xy\tilde{\mathrm{O}}xy$, $\tilde{\mathrm{E}}xy\equiv\tilde{\mathrm{E}}xy\tilde{\mathrm{O}}xy\mathrm{O}xy$.

Контрарность: $\mathrm{A}xy\mathrm{E}xy\equiv\mathrm{A}xy\tilde{\mathrm{E}}xy\equiv\tilde{\mathrm{A}}xy\mathrm{E}xy\equiv\tilde{\mathrm{A}}xy\tilde{\mathrm{E}}xy\equiv 0$,
$\mathrm{A}xy\mathrm{O}xy\equiv\tilde{\mathrm{A}}xy\tilde{\mathrm{O}}xy\equiv\mathrm{E}xy\mathrm{I}xy\equiv\tilde{\mathrm{E}}xy\tilde{\mathrm{I}}xy\equiv 0$.

Подконтрарность: $\mathrm{I}xy\vee\tilde{\mathrm{I}}xy\vee\mathrm{O}xy\vee\tilde{\mathrm{O}}xy\equiv 1$.

Обращение: $\mathrm{A}xy\equiv\tilde{\mathrm{A}}yx$, $\mathrm{O}xy\equiv\tilde{\mathrm{O}}yx$.

Самообращение (симметричность): $\mathrm{E}xy\equiv\mathrm{E}yx$, $\tilde{\mathrm{E}}xy\equiv\tilde{\mathrm{E}}yx$,
$\mathrm{I}xy\equiv\mathrm{I}yx$, $\tilde{\mathrm{I}}xy\equiv\tilde{\mathrm{I}}yx$.

Заметим, что в то время как суждения $\tilde{\mathrm{A}}$ и $\tilde{\mathrm{O}}$ доступны в традиционной силлогистике, благодаря обращению их в A и O, другая пара новых суждений — $\tilde{\mathrm{E}}$ и $\tilde{\mathrm{I}}$ — никак не доступна.

Отношения подчинения, контрарности и подконтрарности изображены на рис. 2 в виде двойного квадрата — исправленной и дополненной версии логического квадрата М. Псела.

5. Модусы силлогизмов

Силлогизм состоит из трех суждений — две посылки и заключение. Традиционная теория различает 4 расположения терминов в посылках и заключении силлогизма («четыре фигуры»):

1) $R1(y, z)R2(x, y)R3(x, z)$,
2) $R1(z, y)R2(x, y)R3(x, z)$,
3) $R1(y, z)R2(y, x)R3(x, z)$,
4) $R1(z, y)R2(y, x)R3(x, z)$.

Поскольку в качестве R1 R2 R3 допустима любая комбинация категорических суждений, которых всего 8, то общее число модусов силлогизма в четырех фигурах равно $4\times 8^3=2048$. Наша дальнейшая задача — установить все правильные модусы, т. е. такие, в которых заключение с необходимостью следует из посылок.

Модус является правильным, если его заключение содержится в конъюнкции его посылок. Таким образом, поставленную задачу можно решить путем проверки по этому критерию каждого из 2048 возможных модусов. Однако, имея в виду, что всякая посылка может быть сведена посредством отрицания терминов к общеутвердительной или к частноутвердительной, т. е. к А или к I, целесообразно получить решение нашей задачи для модусов, в которых содержатся посылки только этих двух типов, а затем распространить его на все модусы.

Имеется всего 8 видов модусов, содержащих только посылки А и I, а именно: ААА, AAI, AII, IAI, AIA, IAA, IIA, III. Из традиционной силлогистики известно (и может быть доказано с использованием рассмотренной выше модели отношений и правил преобразования), что ААА — правильный модус 1-й фигуры, AAI—1-й, 3-й и 4-й фигур, AII—1-й и 3-й, IAI—3-й и 4-й фигур. Остальные четыре — AIA, IAA, IIA, III — не являются правильными модусами ни одной из фигур.

Доказательство правильности, например, модуса ААА 1-й фигуры, утверждающего, что отношение Axz содержится в конъюнкции отношений-посылок $AyzAxy$, выполняется следующим образом. По определению, $Axz=\mathbf{V}'xz'\mathbf{V}x\mathbf{V}z'$, $AyzAxy= =\mathbf{V}'yz'\mathbf{V}y\mathbf{V}z'\mathbf{V}'xy\mathbf{V}x\mathbf{V}y'$. Два последних члена конъюнкции, представляющей Axz, а именно $\mathbf{V}x$ и $\mathbf{V}z'$, явно содержатся в $AyzAxy$, поэтому достаточно показать, что в $AyxAxy$ содержится $\mathbf{V}'xz'$. Для этого преобразуем часть конъюнкции $AyzAxy$, воспользовавшись правилами 1 и 2:

$$\mathbf{V}'yz'\mathbf{V}'xy'=\mathbf{V}'xyz'\mathbf{V}'x'yz'\mathbf{V}'xy'z\mathbf{V}'xy'z'=\mathbf{V}'xz'\mathbf{V}'x'yz'\mathbf{V}'xy'z.$$

Таблица

Правильные модусы категорических силлогизмов

1-я фигура		2-я фигура		3-я фигура		4-я фигура	
$(y, z)(x, y)(x, z)$		$(z, y)(x, y)(x, z)$		$(y, z)(y, x)(x, z)$		$(z, y)(y, x)(x, z)$	
+AAA	ÃÃÃ	AÃÃ	ÃAA	AÃA	ÃAÃ	AAÃ	ÃÃA
AẼẼ	ÃEE	+AEE	ÃẼẼ	AẼẼ	ÃEE	+AEE	ÃẼẼ
−EAE	ẼÃẼ	+EAE	ẼÃẼ	EÃE	ẼAẼ	EÃE	ẼAẼ
EẼÃ	ẼEA	EẼÃ	ẼEA	EẼÃ	ẼEA	EẼÃ	ẼEA
−AAI	ÃÃĨ	AÃI	ÃAĨ	AÃI	ÃAĨ	+AAI	ÃÃĨ
AAĨ	ÃÃI	AÃĨ	ÃAI	AÃĨ	ÃAI	AAĨ	ÃÃI
AẼO	ÃEÕ	−AEO	ÃẼÕ	AẼO	ÃEÕ	−AEO	ÃẼÕ
AẼÕ	ÃEO	AEÕ	ÃẼO	AẼÕ	ÃEO	AEÕ	ÃẼO
−EAO	ẼÃÕ	−EAO	ẼÃÕ	EÃO	ẼAÕ	EÃO	ẼAÕ
EAÕ	ẼÃO	EAÕ	ẼÃO	EÃÕ	ẼAO	EÃÕ	ẼAO
EẼI	ẼEĨ	EẼI	ẼEĨ	EẼI	ẼEĨ	EẼI	ẼEĨ
EẼĨ	ẼEI	EẼĨ	ẼEI	EẼĨ	ẼEI	EẼĨ	ẼEI
AÃI	ÃAĨ	AAĨ	ÃÃI	+AAI	ÃÃĨ	AÃĨ	ÃAI
AEÕ	ÃẼO	AẼO	ÃEÕ	AEÕ	ÃẼO	AẼO	ÃEÕ
EÃO	ẼAÕ	EÃO	ẼAÕ	+EAO	ẼÃÕ	+EAO	ẼÃÕ
EEĨ	ẼẼI	EEĨ	ẼẼI	EEĨ	ẼẼI	EEĨ	ẼẼI
+AII	ÃĨĨ	AĨĨ	ÃII	+AII	ÃĨĨ	AĨĨ	ÃII
AÕÕ	ÃOO	+AOO	ÃÕÕ	AOÕ	ÃÕO	AÕO	ÃOÕ
+EIO	ẼĨÕ	+EIO	ẼĨÕ	+EIO	ẼĨÕ	+EIO	ẼĨÕ
EÕĨ	ẼOI	EÕĨ	ẼOI	EOĨ	ẼÕI	EOĨ	ẼÕI
IÃI	ĨAĨ	IÃI	ĨAĨ	+IAI	ĨÃĨ	+IAI	ĨÃĨ
IEÕ	ĨẼO	IEÕ	ĨẼO	IEÕ	ĨẼO	IEÕ	ĨẼO
OÃO	ÕAÕ	OAÕ	ÕÃO	+OAO	ÕÃÕ	OÃÕ	ÕAO
OEĨ	ÕẼI	OẼI	ÕEĨ	OEĨ	ÕẼI	OẼI	ÕEĨ

Видно, что в $AyzAxy$, наряду с $\mathbf{V}x$ и $\mathbf{V}z'$, содержится также $\mathbf{V}'xz'$, т. е. $AyzAxy$ содержит Axz, что и требовалось доказать. Аналогично доказывается правильность других перечисленных модусов. Равноценные доказательства на диаграммах Л. Кэррола даны в [12]. С помощью алгебры и диаграмм

Кэррола можно показать, что, помимо перечисленных, ни один модус рассматриваемых 8 видов не является правильным в какой-либо фигуре.

Все правильные модусы произвольного вида, т. е. допускающие в качестве посылок и заключения любое из отношений A, I, E, O, $\tilde{A}$, $\tilde{I}$, $\tilde{E}$, $\tilde{O}$, получаются путем отрицания терминов в доказанных правильных модусах и трансформации расположения терминов к установленному для различных фигур. При этом в каждом из четырех видов — AAA, AAI, AII, IAI — получается по 32 правильных модуса.

Например, модус AAA 1-й фигуры, т. е. $AyzAxyAxz$, в результате замены x на x' превращается в $AyzAx'yAx'z$, что равносильно модусу $A\tilde{E}\tilde{E}$ 1-й фигуры, а в результате замены y на y' — в $Ay'zAxy'Axz$, что равносильно модусу $\tilde{\tilde{E}}EA$ 1-й, 2-й, 3-й и 4-й фигур. В результате замены всех терминов их отрицаниями имеем $Ay'z'Ax'y'Ax'z'$, т. е. модус $\tilde{A}A\tilde{A}$ 1-й фигуры, равносильный модусу $\tilde{A}A\tilde{A}$ 3-й фигуры, модусу $AA\tilde{A}$ 4-й фигуры и т. д.

Полный перечень всех правильных модусов четырех фигур — всего 192 модуса из 2048 возможных, приведен в таблице.

Знаком «+» отмечены модусы, входящие в число 19 правильных в традиционной теории. Знаком «—» отмечены пять модусов с отношениями A, I, E, O, не включенных традиционной теорией непосредственно в число 19 правильных, а получаемых с помощью законов подчинения. Исключением является модус AAI 4-й фигуры, выводимый по закону подчинения из $AA\tilde{A}$, которого в традиционной теории нет.

Литература

1. Лейбниц Г. Новые опыты о человеческом разуме.— М.—Л.: 1936.
2. Бурбаки Н. Теория множеств.— М.: Мир, 1965.
3. Лукасевич Я. Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики.— М.: ИЛ, 1959.
4. Аристотель. Собрание сочинений: В 4-х т.— М.: Мысль, 1978, т. 2.
5. Кант И. Собрание сочинений: В 6-ти т.— М.: Мысль, 1964, т. 3.
6. Гильберт Д., Аккерман В. Основы теоретической логики.— М.: ИЛ, 1947.
7. Новиков П. С. Элементы математической логики.— М.: Физматгиз, 1959.
8. Клини С. Математическая логика.— М.: Мир, 1973.
9. Codd E. F. Extending the database relational model to capture more meaning.— «ACM Trans. on Database Systems», 1979, v. 4, n. 4, p. 397—434.
10. Кэррол Л. История с узелками.— М.: Мир, 1973.
11. Брусенцов Н. П. Математическая теория силлогистики.— В кн.: Вычислительная техника и вопросы кибернетики. Вып. 8. Л.: Изд-во ЛГУ, 1971.
12. Брусенцов Н. П. Диаграммы Льюиса Кэррола и аристотелева силлогистика.— В кн.: Вычислительная техника и вопросы кибернетики. Вып. 13. М.: Изд-во МГУ, 1977.

Опубликовано: Вычислительная техника и вопросы
кибернетики. Вып.19. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982. С. 3-17.