Булевы уравнения и логический вывод

Н.П. Брусенцов, Ю.С. Владимирова

Джордж Буль усматривал в решении логических уравнений наиболее общую проблему логики [1, с. 87]: «…задано логическое уравнение, содержащее символы *x*, *y*, *z*, *w*. Требуется найти логически интерпретируемое выражение для выяснения отношения класса, обозначенного через *w*, к классам, обозначенным через *x*, *y*, *z* и т.д.» Он формулирует ту же проблему и более кратко: «Задано (логическое) уравнение; найти выражение одного термина в функции остальных» [2, с. 325]. Этот подход нашел понимание и получил дальнейшее развитие у Э. Шредера, У.С. Джевонса, П.С. Порецкого [3]. Однако в современной математической логике он не воспринят, и решение булева уравнения сведено теперь к выявлению удовлетворяющих этому уравнению индивидных конъюнкций (*n*-ок) терминов, что равносильно преобразованию его в СДНФ единичную форму. Таким образом, вместо установления обусловленных уравнением взаимосвязей между терминами определяется класс удовлетворяющих ему индивидных вещей (“предметов”).

Развитию и компьютерной реализации решения логических уравнений в булевом понимании посвящены наши работы [4-7], в которых существенно усовершенствован метод Буля-Порецкого, предложено более простое решение, а также совокупностная интерпретация булевой алгебры классов, открывающая возможность алгебраического манипулирования булевыми выражениями как совокупностями индивидных конъюнкций терминов, преобразуемыми теоретико-множественными операциями пересечения, объединения и инверсии. Сами эти операции выполняются компьютером как побитные конъюнкция, дизъюнкция и отрицание битных векторов (так называемых «ДК-шкал»), которыми закодированы СДНФ-выражения.

В связи с обобщением булевой алгебры классов путем включения в нее понятия «нечеткий класс» [8] решение логических уравнений как способ получения умозаключений из определяемой ими взаимосвязанности терминов обретает новые возможности. В частности, булево исчисление классов оказывается распространимым на силлогистику Аристотеля – систему, наиболее адекватно отображающую естественноязыковое рассуждение, но упорно не вписывающуюся в исчисления «классической» логики. Представление суждений силлогистики в виде нечетких классов вещей, охарактеризованных содержащимися в суждениях терминами, позволяет алгебраически исследовать выраженные суждениями взаимосвязи, причем использовать компьютер для получения искомых умозаключений.

Общеутвердительное силлогистическое суждение «Всякое x есть y», выражающее отношение содержательного логического следования y из x, отображается в обобщенной булевой алгебре нечетким классом вещей, охарактеризованных терминами-особенностями x и y [8]: $xy \vee \sigma x'y \vee x'y'$, где σ – символ, обозначающий третье промежуточное «значение истинности»: не «есть» и не «нет», не «1» и не «0», $0 < \sigma < 1$. В противоположность xy- и $x'y'$-вещам, необходимо включенным в данный класс, и умалчиваемым в выражении xy'-вещам, которые необходимо исключены, $\sigma x'y$-вещи имеют привходящий статус – не включены и не исключены с необходимостью (четко). Наличие $x'y$-вещи не утверждает и не отрицает следования y из x, оно несущественно для этого отношения. В булевой алгебре четких классов отношение следования вырождается в материальную импликацию $xy \vee x'y \vee x'y'$ с присущими ей «парадоксами»: на x'-вещах она удовлетворяется независимо от y, а на y-вещах независимо от x. В результате «классическая» логика оказывается бессодержательной, лишенной здравого смысла.

СДНФ-выражения нечетких классов вещей представляют собой нечеткие дизъюнктивные совокупности индивидных конъюнкций терминов, отобразимые ДК-шкалами тритов, подобно тому как СДНФ-выражения четких классов отображаются ДК-шкалами битов [7]. Так, выражение $xy \vee \sigma x'y \vee x'y'$ однозначно кодируется четырехтритной шкалой (вектором тритов) +-0+, в которой «-» означает исключенность xy'-вещей, а «0» – привходящий статус $x'y$-вещей. В трехтерминном x, y, z-универсуме тот же нечеткий класс выразится шестичленной СДНФ $xyz \vee xyz' \vee \sigma x'yz \vee \sigma x'yz' \vee x'y'z \vee x'y'z'$ и соответственно восьмитритным кодом ++--00++. Суждение «Всякое y есть z» отображается нечетким классом $yz \vee \sigma y'z \vee y'z'$ и восьмитритным кодом +-0++-0+.

Теперь вывод заключения из посылок «Всякое x есть y» и «Всякое y есть z» (совершенный модус Barbara, принимаемый Аристотелем в качестве аксиомы) реализуется компьютером путем пересечения, т.е. потритной конъюнкции, соответствующих ДК-шкал:

$$++--00++ \bigcap +-0++-0+ = +---0-0+.$$

Декодируя шкалу-результат, получим $xyz \vee \sigma x'yz \vee \sigma x'y'z \vee x'y'z'$, что элиминацией термина y сводится к $xz \vee \sigma x' z \vee x'z'$ – «Всякое x есть z».

Решение относительно термина y уравнения $xy \vee \sigma x'y \vee x'y' = 1$, выражающего содержательное следование y из x, по формуле $y = ye \vee \neg y \neg e$ [7] при помощи ДК-шкал: y = +-+-, $\neg y$ = -+-+, e = +-0+, $\neg e$ = -+0- дает в результате: (+-+- $\bigcap$ +-0+) $\bigcup$ (-+-+ $\bigcap$ -+0-) = = +-0- $\bigcup$ -+-- = ++0-. Декодируя полученную шкалу, имеем $y = x \vee \sigma x'y$, что в полном соответствии с содержательным следованием y из x.

Литература

1. Boole G. An investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities. London, 1854.
2. Стяжкин Н.И. Формирование математической логики. – М.: «Наука», 1967.
3. Порецкий П.С. О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики. Опыт построения полной и общедоступной теории умозаключений над качественными формами. – Казань, 1884.
4. Брусенцов Н.П. Начала информатики. – М.: Фонд «Новое тысячелетие», 1994.
5. Владимирова Ю.С. Конструктная реализация булевой алгебры. // Интегрированная система обучения, конструирования программ и разработки дидактических материалов. – М.: Изд-во ф-та ВМиК, 1996. С.44-69.
6. Brusentsov N.P., Vladimirova Yu.S., Solution of Boolean Equations. // Computational mathematics and modeling, Vol. 9, № 4, 1998, pp. 287-295.
7. Брусенцов Н. П., Владимирова Ю. С. Компьютеризация булевой алгебры // Доклады Академии Наук, 2004, № 395, т. 2. С. 7-10.

8. Брусенцов Н.П. Обобщение булевой алгебры // Программные системы и инструменты: Тематический сборник № 5. Под ред. Л.Н.Королева. – М. Издательский отдел ВМиК МГУ, 2004. С. 6-9.

Доложено на Ломоносовских чтениях 2004 г. на факультете ВМиК МГУ.

Опубликовано в «Программные системы и инструменты». Тематический сборник № 5. Под ред. Л.Н.Королева. – М. Издательский отдел ВМиК МГУ, 2005. С.10-12.