ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2004, том 395, № 1, с. 1–4

МАТЕМАТИКА

УДК 519.5:519.6

КОМПЬЮТЕРИЗАЦИЯ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ

© 2004 г. Н. П. Брусенцов, Ю. С. Владимирова

Представлено академиком В.С. Владимировым 28.07.2003 г.

Поступило 05.11.2003 г.

Алгебра булевых выражений в совершенных нормальных формах, интерпретируемых как иерархии конъюнктивных и дизъюнктивных совокупностей, сведена к теоретико-множественным операциям над векторами битов, посредством которых эти выражения систематически закодированы. Проблема умозаключения (логического вывода) сведена к решению булевых уравнений, исчерпывающе компьютеризованному.

Булева алгебра в современных языках программирования представлена переменными типа boolean, принимающими значения 1, 0, которые интерпретируются как “истинно” (true, T), “ложно” (false, F), и определенными над ними операциями отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквивалентности. Эти средства используются для формулирования и проверки условий ветвления вычислительных программ. Странно, но и в языках искусственного интеллекта, таких, как Лисп и Пролог, возможности булевой алгебры не получили надлежащего развития и применения. А ведь основоположник этой алгебры Джордж Буль в своих “Законах мысли” усматривает наиболее общую проблему логики именно в решении логических уравнений. Алгебра логики затем и создавалась, чтобы свести дедукцию к решению уравнений, уподобив логику математике, о чем говорил уже Лейбниц: “…если среди людей возникает спор, нужно сказать: “Посчитаем!”. Правда, надежды Лейбница построить универсальную характеристику теперь в свете результатов Гёделя признаются несбыточными, однако методы решения логических уравнений, начало которым положил Буль, существуют [1–6], и было бы невосполнимым упущением не позаботиться об их компьютеризации.

Кстати, компьютер как цифровая машина, в основе которой находится все та же булева алгебра, по сути своей предназначен для решения логических задач. Надо только видоизменить интерпретацию кода обрабатываемых данных, подразумевая в нем не числа, а качественные характеристики рассматриваемых вещей.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

СОВОКУПНОСТНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ

Прежде чем кодировать булевы выражения, естественно уяснить, что и как они выражают. Принятое формалистами именование объектов булевой алгебры высказываниями и высказывательными формами сути этих объектов не проясняет: высказывание даже абстрактнее выражения. Буль же говорил об алгебре классов, явно имея в виду классы вещей, взаимосвязанность которых его алгебра призвана отобразить и исследовать.

Мы интерпретируем булеву алгебру как иерархию совокупностей рассматриваемых объектов – (первичных) терминов и конструируемых из них выражений, которые представляют собой совокупности терминов. Совокупность – это перечень попарно различимых, однозначно опознаваемых объектов, возможно упорядоченных подобно знакам алфавита либо числам.

Необходимо различать совокупности конъюнктивные – множества и дизъюнктивные – классы. Множество – это конъюнкция (совместность) составляющих его объектов, элементов или членов множества. Они принадлежат множеству, содержатся в нем. Класс же определяется удовлетворяемым всеми включенными в него объектами общим для них критерием, присущим всем им признаком атрибутом. Таким образом, множество определяется составом совокупности, а класс – особенностью, присущей совокупности в целом.

В булевой алгебре множества терминов представлены элементарными конъюнкциями. Термины, необходимо принадлежащие множеству, входят в конъюнкцию непосредственно, антипринадлежащие инвертируются (снабжаются штрихом), привходящие умалчиваются (отсутствуют). Конъюнкцию, в которой присутствуют все n рассматриваемых терминов, назовем индивидной, поскольку она соответствует в n-терминном универсуме индивидному (единичному) классу вещей: термины, не инвертированные в ней, присущи характеризуемой вещи, инвертированные антиприсущи, умолчаний нет. В n-терминном универсуме 3^n элементарных конъюнкций, т.е. четких и нечетких множеств терминов, из них 2^n четкие, индивидные.

Классы терминов аналогично представлены элементарными дизъюнкциями. Аналогом, а точнее, дуалом индивидной конъюнкции является предполная дизъюнкция, представляющая собой класс вещей, дополняющий до универсума инверсию четкой конъюнктивной совокупности тех же терминов.

П р и м е р ы. Индивидная конъюнкция $xy'zw$ представляет собой четкое множество терминов $\{x, z, w\}$ и индивидный класс вещей, которым присуще $xz'w$ и антиприсуще y. Неиндивидной конъюнкции $xy(w$ соответствуют нечеткое множество $\{x, \sigma z, w\}$, где σ – символ привходящего, и неиндивидный класс вещей, состоящий из двух индивидных: $xy'w \equiv xy'zw \vee xy'z'w$.

Дуалом индивида $xy'zw$ служит дизъюнктивная версия той же совокупности: $\delta(xy'zw) \equiv x \vee y' \vee z' \vee w$, а дополнением его до универсума, т. е. булевым отрицанием, оказывается дуал его инверсии:

$$\neg(xy'zw) \equiv \delta(xy'zw)' \equiv \delta(x'yz'w') \equiv x' \vee y \vee z' \vee w'.$$

Заметим, что над совокупностями терминов наряду с инверсией определены теоретико-множественные операции пересечения и объединения.

Второй уровень иерархии совокупностей в булевой алгебре составляют совокупности совокупностей первого уровня, т.е. совокупности элементарных конъюнкций либо дизъюнкций, в частности индивидных конъюнкций либо предполных дизъюнкций.

Произвольный класс в булевой алгебре представим дизъюнкцией элементарных конъюнкций – дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ), в частности дизъюнкцией индивидных конъюнкций – совершенной ДНФ (СДНФ). Последняя представляет собой четкую дизъюнктивную подсовокупность полной совокупности вещей, различимых по n терминам-критериям. Двойственные, конъюнктивные нормальные формы представляют собой конъюнктивные совокупности элементарных дизъюнкций (КНФ), в частности четкие конъюнктивные совокупности – множества предполных дизъюнкций (СКНФ).

То, что СДНФ и СКНФ булевых выражений представляют собой четкие совокупности своих членов, радикально упрощает реализацию алгебры выражений в совершенных нормальных формах (СНФ-выражений). Булево отрицание СНФ-выражения реализуется инверсией совокупности членов этого выражения, порождающей в качестве результата дополнение инвертируемой совокупности до универсума. Конъюнкция и дизъюнкция СДНФ-выражений реализуются соответственно как пересечение и объединение совокупностей членов этих выражений. Конъюнкции же и дизъюнкции СКНФ-выражений соответствуют объединению и пересечению.

П р и м е р ы. В универсуме вещей, различаемых относительно терминов x, y, четыре индивида: xy, xy', $x'y$, $x'y'$. Класс вещей, для которых x противоположно y, выражается дизъюнкцией (дизъюнктивной подсовокупностью полной совокупности индивидов): $xy' \vee x'y$. Булево отрицание этого класса есть инверсная ей подсовокупность: $xy \vee x'y'$ – класс, включающий только те вещи, для которых x эквивалентно y. Этот класс выражается также конъюнкцией $(x \vee y') \wedge (x' \vee y)$, которая равносильна пересечению дизъюнктивных подсовокупностей $xy \vee xy' \vee x'y'$ и $xy \vee x'y \vee x'y'$. Обратно, например, класс $x \vee y'$ порождается теоретико-множественным объединением дизъюнктивных подсовокупностей $xy \vee x'y'$ и $x'y$ (последняя представляет собой инверсию $xy \vee xy' \vee x'y'$).

Таким образом, булева алгебра классов полностью реализуема как теоретико-множественная алгебра дизъюнктивных совокупностей индивидных конъюнкций терминов, т.е. членов СДНФ-выражений, а также конъюнктивных совокупностей предполных дизъюнкций – членов СКНФ-выражений.

РЕШЕНИЕ БУЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ

В математической логике n-терминное выражение булевой алгебры интерпретируют как n-арную функцию $f(x, y, \ldots, w)$ терминов-переменных $x, y, \ldots, w$, которая, как и сами термины, принимает значения 1 и 0. Полагая значение функции фиксированным, имеем булево уравнение, выражающее отношение, которым взаимосвязаны термины $x, y, \ldots, w$.

В наиболее общей форме уравнение представимо приравниванием двух функций, т.е. двух выражений, друг другу:

$$f(x, y, \ldots, w) = g(x, y, \ldots, w)$$

Оно приводимо к так называемой единичной $e_1(x, y, \ldots, w) = 1$ и к нулевой $e_0(x, y, \ldots, w) = 0$ формам, где $e_1 = fg \vee \neg f \neg g$, $e_0 = f \neg g \vee \neg fg$. Функцию $e_1(x, y, \ldots, w)$ называют характеристической функцией выражаемого уравнением отношения.

Система из нескольких совместных уравнений, записанных в единичной форме, сводится к одному уравнению, выражение e_1 которого есть конъюнкция всех одноименных выражений системы (уравнения в нулевой форме сочленяются в одно дизъюнкцией всех e_0). Заметим, что $e_0 \equiv \neg e_1$.

По Булю решить логическое уравнение, содержащее термины $x, y, \ldots, w$, относительно термина w – значит “найти логически интерпретируемое выражение для выявления отношения класса, обозначенного через w, к классам, обозначенным через $x, y, \ldots$ и т.д.”. Этой задачей занимались Дж. Буль, У. Джевонс, Э. Шрёдер, П.С. Порецкий и некоторые современные исследователи, из которых отметим А.А. Щукиса [3] и А.Д. Закревского [4]. Уточнению метода Буля–Порецкого посвящена наша работа [5, 6]. Однако наиболее простое и общее решение дано в [7]: решение уравнения $e(x, y, \ldots, w) = 1$ относительно термина w получается в виде

$$w = ew \vee \neg e \neg w.$$

Общность его в том, что w здесь не непременно первичный термин – один из независимых аргументов функции $e(x, y, \ldots, w)$, а произвольная функция каких-либо из них – булево выражение, представляющее составной класс.

Мы называем конструктом программно конструируемый тип данных. Конструируется программа, сопоставляющая символам, которые объявлены именами вводимого типа объектов, отформатированные совокупности битов либо тритов, призванные принимать присваиваемые им поименно коды-значения. Реализуется базисный набор интерпретирующих эти значения процедур – операций вводимого типа.

Пример. Конструкт “n-терминная индивидная конъюнкция” кодирует значение переменной n-битным вектором, компоненты которого однозначно сопоставлены членам конъюнкции и принимают в случае инвертированных терминов значение 0, а в случае неинвертированных значение 1. Так, кодом индивида $xy'zw$ будет 1011, кодом $x'yz'w'$ – 0100 и т.д.

Интерпретируемый в этом смысле вектор битов мы называем К-шкалой битов. Двойственная интерпретация того же вектора как предполной дизъюнкции n терминов приводит к Д-шкале битов. Элементарные конъюнкции и дизъюнкции кодируются соответственно К-шкалой тритов и Д-шкалой тритов. Базисными операциями над шкалами всех типов являются инверсия, пересечение и объединение представляемых шкалами совокупностей терминов, четких в случае битных шкал, четких и нечетких в случае тритных.

Произвольное n-терминное СДНФ-выражение отображается ДК-шкалой битов – 2^n-битным вектором, интерпретируемым как дизъюнктивная совокупность n-терминных индивидных конъюнкций. Операции булева отрицания, конъюнкции и дизъюнкции СДНФ-выражений реализуются как инверсия, пересечение и объединение кодирующих эти выражения ДК-шкал.

Пример. Решение относительно термина y булева уравнения $x' \vee y = 1$, выражающего отношение материальной импликации $x \to y$. СДНФ характеристической функции данного уравнения $e \equiv xy \vee x'y \vee x'y'$ кодируется ДК-шкалой 1011, термин y – 1010, их отрицания – соответственно 0100 и 0101. Искомое решение $y = ey \vee \neg e \neg y$ вычисляется посредством шкал:

$$(1011 \cap 1010) \cup (0100 \cap 0101) = 1010 \cup 0100 = 1110$$

Декодируя результат, имеем

$$y = xy \vee xy' \vee x'y = x \vee y$$

Это рекурсивное равенство показывает, что при $x = 1$ (т.е. если выполняется x) y не может не выполняться, $y = 1$, а если x не выполняется, $x = 0$, то значение y не фиксировано, четко не определено, привходяще.

Заметим, что то же решение, преобразуемое по обычным правилам булевой алгебры с отрицанием по де Моргану, приводит к тупиковой форме, смысл которой не столь очевиден:

$$y = (x' \vee y)y \vee \neg(x' \vee y)y' = x'y \vee y \vee xy' = y \vee xy'.$$

Решение относительно x: $x = xy$ означает, что x не будет выполняться, т.е. $x = 0$, если $y = 0$, тогда как при $y = 1$ значение x привходяще.

Представление булевых выражений ДК-шкалами позволяет просто и эффективно компьютеризовать алгебру СДНФ-выражений, поскольку операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции этих выражений реализуются как инверсия, пересечение и объединение ДК-шкал, т.е. как побитные отрицание, конъюнкция и дизъюнкция булевых векторов, отображающих шкалы. При решении задачи, сформулированной посредством булевых выражений произвольной формы, все они преобразуются в СДНФ и представляются ДК-шкалами. Результаты решения, получаемые в виде ДК-шкал, представляют собой СДНФ-выражения, которые могут быть преобразованы в иную требуемую форму, в частности в минимальную, для представления которой используется формат “цепь n-терминных К-шкал тритов” [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boole G.* An Investigation of the Laws of Thought on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities. L., 1854. 448 p.
2. *Порецкий П.С.* О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики: Опыт построения полной и общедоступной теории умозаключений над качественными формами. Казань, 1884. 170 с.
3. *Щукис А.А.* Математическая логика. Вп. 2. Алгебра Буля. Барнаул: Алт. политехн. ин-т, 1974. 216 с.
4. *Закревский А.Д.* Логические уравнения. Минск: Наука и техника, 1975. 95 с.

5. *Брусенцов Н.П., Владимирова Ю.С.* В сб.: Методы математического моделирования. М.: Диалог-МГУ, 1998. С. 59–68.
6. *Brusentsov N.P., Vladimirova Yu.S.* // Comput. Math. and Model. 1998. V. 9. № 4. P. 287–295.
7. *Владимирова Ю.С.* В сб.: Интегрированная система обучения, конструирования программ и разработки дидактических материалов: (учеб.-метод. пособие). М.: Изд-во МГУ, 1996. С. 44–69.
8. *Брусенцов Н.П., Владимирова Ю.С.* В сб.: Цифровая обработка информации и управление в чрезвычайных ситуациях. Минск: Ин-т техн. кибернетики НАНБ, 2002. Т. 2. С. 195–199.