Владимирова Ю. С.

Метод индексов Льюиса Кэрролла как основа компьютеризации рассуждения

«Символическая логика» Льюиса Кэрролла, созданная им как средство развития систематического мышления, была нацелена в первую очередь на решение силлогизмов [1]. В силлогистике Аристотеля непарадоксально выражено основополагающее для всякого рассуждения отношение следования $x \Rightarrow y$ в виде общей посылки «Всякий x есть y» [3]. Метод индексов Кэрролла [1, 2] позволяет естественно и непротиворечиво выразить это важнейшее отношение в алгебраической форме. Принятая Кэрроллом интерпретация логических выражений соответствует часто применяемому в информационных технологиях способу представления объектов в виде совокупности их особенностей. Указанные достоинства определяют выбор метода индексов получения логических выводов в качестве основы компьютеризации рассуждения.

В логике Кэрролла исследуются отношения между вещами, характеризуемыми посредством присущих им особенностей, обозначаемых буквами-терминами (x, y, z, …), либо их совокупностей. Отношение определяется перечислением вещей необходимо существующих и невозможных при его наличии. В методе индексов существование вещи обозначается приписыванием индекса «1» к характеризующему ее сущность выражению, а невозможность существования вещи – приписыванием индекса «0». Например, существование xy-вещей обозначается как xy_1, несуществование xy'-вещей – как xy'_0.

Совместное существование и несуществование вещей представляется конъюнкцией соответствующих выражений с индексами. Так, конъюнкция $x_1xy'_0$ означает, что в рассмотрении имеются x-вещи, и вместе с тем отсутствуют xy'-вещи. Это отношение принимается Кэрроллом в качестве общеутвердительной посылки «Всякий x есть y».

Выражение сущности всех модусов силлогистики методом индексов достигается подчинением всех рассматриваемых отношений принципу сосуществования противоположностей [3], согласно которому все однотерминные особенности x, x', y, y', z, z', … должны быть представлены в рассмотрении хотя бы одной вещью. Согласно этому принципу, используемое Кэрроллом выражение $x_1xy'_0$ общеутвердительной посылки необходимо совмещается с существованием y'-вещей, и преобразуется в $x_1xy'_0y'_1$ – выражение отношения следования $x \Rightarrow y$.

Метод индексов состоит в получении умозаключения из исходных посылок применением правил преобразования выражений. Эти правила справедливы в общем случае применения метода индексов для исследования взаимосвязи между особенностями, представленными произвольными булевыми выражениями. Пусть универсум рассмотрения задан n особенностями $x_1,..., x_n$, которые удовлетворяют условию сосуществования противоположностей, и булевы выражения $f(x_1,..., x_n)$ и $g(x_1,..., x_n)$ характеризуют сущности особенностей f и g. Правила преобразования выражений следующие:

(1) $f_0 g_0 \equiv (f \vee g)_0$

(2) $(fg \vee fg')_1 fg'_0 \equiv fg_1 fg'_0$

(3) $f_1 \vee g_1 \equiv (f \vee g)_1$

(4) $fg_1 \Rightarrow f_1; fg_1 \Rightarrow g_1$

Особенность f' – антипод особенности f, характеризующий все вещи, лишенные особенности f.

Аналогично взаимосвязи между однотерминными особенностями, отношение следования между особенностями $f \Rightarrow g$ имеет место, если одновременно существуют fg- и $f'g'$-вещи и не существуют fg'-вещи, т.е.

$$f \Rightarrow g \equiv fg_1 f'g'_1 fg'_0.$$

Соответственно для того, чтобы проверить наличие отношения $f \Rightarrow g$, необходимо убедиться, что в ситуации, заданной системой посылок существуют fg- и $f'g'$-вещи и не существуют fg'-вещи.

Имеющиеся в рассмотрении посылки даны совместно, и взаимосвязь, выражающая исходные условия, представляется конъюнкцией всех посылок. Согласно правилу (1) конъюнкция выражений с индексом «0» может быть сведена к одному выражению с индексом «0». Тогда исходная система посылок представляется в общем виде как:

$$P_0 Q^{(1)}{}_1 Q^{(2)}{}_1 \ldots Q^{(m)}{}_1,$$

где P, $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, …, $Q^{(m)}$ – булевы выражения.

Пусть, например, даны три посылки:

$y'z \Rightarrow x' \equiv xy'z_0\, x'y'z_1\, x(y \vee z')_1$

$wx \Rightarrow y \ \equiv wxy'_0\, wxy_1\, y'(w' \vee x')_1$

$w'xz' \Rightarrow y \equiv w'xy'z'_0\, w'xyz'_1\, y'(w \vee x' \vee z)_1$

Их конъюнкция преобразуется к виду:

$$(xy'z \vee wxy' \vee w'y'z')_0\, x'y'z_1\, x(y \vee z')_1\, wxy_1\, y'(w' \vee x')_1\, w'yz'_1\, y'(w \vee x' \vee z)_1.$$

Указанное преобразование осуществляется просто применительно к выражениям приведенным в СДНФ. Так, согласно правилу (2), из всех $Q^{(i)}$ требуется исключить все конъюнкции, входящие в P. В приведенном примере конъюнкции $wxy'z$, $w'xy'z$, $wxy'z'$ и $w'xy'z'$ исключаются из всех выражений с индексом «1»:

$$(wxy'z \vee wxy'z' \vee w'xy'z \vee w'xy'z')_0 \wedge$$
$$\wedge (wx'y'z \vee w'x'y'z)_1 (wxyz \vee w'xyz \vee wxyz' \vee w'xyz')_1 \wedge$$
$$\wedge (wxyz \vee wxyz')_1 (w'x'y'z \vee wx'y'z \vee wx'y'z' \vee w'x'y'z')_1 \wedge$$
$$\wedge (w'xyz' \vee w'x'yz')_1 (wx'y'z \vee wx'y'z' \vee w'x'y'z \vee w'x'y'z')_1.$$

После этого преобразования нетрудно заметить, что

$(wxy'z \vee w'xy'z \vee wxy'z' \vee w'xy'z')_0 \equiv xy'_0,$
$(wxyz \vee w'xyz \vee wxyz' \vee w'xyz')_1 \equiv xy_1,$
$(w'x'y'z \vee wx'y'z \vee wx'y'z' \vee w'x'y'z')_1 \equiv x'y'_1,$
откуда, согласно правилу (4), из исходного набора посылок следует отношение между x и y:

$xy'_0\, xy_1\, x'y'_1 \equiv x \Rightarrow y.$

Программная реализация метода индексов основана на кодировании СДНФ шкалами – векторами битов длины 2^n, в которых битам сопоставлены конъюнкции n терминов. Например, в четырехтерминном универсуме выражение $xy' \equiv wxy'z \vee w'xy'z \vee wxy'z' \vee w'xy'z'$ кодируется вектором битов 0011000000110000, где младшему биту соответствует конъюнкция $w'x'y'z'$.

Система посылок кодируется набором шкал, одна из которых представляет выражение P, остальные – выражения $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \ldots, Q^{(m)}$.

Преобразования по правилам (1)-(4) осуществляются побитными операциями над шкалами. Добавление к P нового выражения с индексом «0» по правилу (1) реализуется побитной дизъюнкцией соответствующих шкал. Преобразование (2) – исключение из очередного $Q^{(i)}$ всех дизъюнкций, входящих в P осуществляется побитной конъюнкцией шкалы, кодирующей $Q^{(i)}$ с побитной инверсией шкалы, кодирующей выражение P.

Поскольку все $Q^{(i)}$ порождаются исходными отношениями или условием сосуществования противоположностей, ни одна из этих шкал не может в результате преобразования (2) исчерпать все свои единицы.

В приведенном примере исходные посылки представляются следующими шкалами:

P: 0011000000110000
$Q^{(1)}$: 0000001000000010
$Q^{(2)}$: 1101000011010000
$Q^{(3)}$: 1100000000000000
$Q^{(4)}$: 0000001100110011
$Q^{(5)}$: 0000000010000000
$Q^{(6)}$: 0011111100001111

После исключения из $Q^{(i)}$ дизъюнкций, входящих в P, шкалы $Q^{(2)}$, $Q^{(4)}$ и $Q^{(6)}$ примут значения:

$Q^{(2)}$: 1100000011000000
$Q^{(4)}$: 0000001100000011
$Q^{(6)}$: 0000111100001111

Проверка наличия взаимосвязи $x \Rightarrow y$ осуществляется побитным сопоставлением шкалы xy' со шкалой P, и шкал xy и $x'y'$ со всеми $Q^{(i)}$. Если во всех битах, в которых шкала xy' содержит единицы, шкала P также содержит единицы, и среди шкал $Q^{(i)}$ имеются такие, которые содержат единицы только в тех битах, в которых единицы есть в шкале

xy или в шкале $x'y'$, то отношение $x \Rightarrow y$ в условиях, заданных системой посылок выполняется.

Выражения xy', xy и $x'y'$ кодируются значениями:

xy': 0011000000110000

xy: 1100000011000000

$x'y'$: 0000001100000011

Отсюда видно, что шкала xy' совпадает со шкалой P, единицы в шкале $Q^{(3)}$ есть только в тех битах, в которых есть единицы в шкале xy, шкалы $Q^{(4)}$ и $Q^{(6)}$ содержат единицы только в тех битах, в которых единицы есть в шкале $x'y'$. Следовательно, из исходной системы посылок можно заключить, что имеет место отношение $x \Rightarrow y$.

Программный инструментарий, осуществляющий выявление отношений на основе метода индексов, реализуется на языке Диалоговой системы структурированного программирования ДССП [4] в виде набора процедур, применимых к шкалам и производящих основные операции: совмещение посылок (правила (1)-(3)), проверка удовлетворенности принципу сосуществования, добавление однотерминной особенности, элиминирование особенностей (правило (4)) и проверка наличия взаимосвязи между заданными особенностями.

ДССП – развиваемая система программирования. Добавлением нового набора процедур достигается ее специализация в некоторой области. В данном случае ДССП становится средством создания систем рассуждения. Например, процедуры выявления отношений, могут применяться для анализа данных, приводимых к формату шкалы базовыми средствами ДССП. Возможна также автоматизация метода деревьев Кэрролла [2] – задачи исследования отношений, в которых из данности одного суждения следует данность другого, т.е. в качестве универсума рассмотрения взяты отношения.

Литература

1. Кэрролл Л. Символическая логика. // История с узелками. – М.: «Мир», 1973.

2. Carroll L. Symbolic logic // Ed., with annotations a. an introd. By Bartley W.W. - N.Y.: Clarkson N.Potter, 1977. - XXV, 496 p. – Cont.: Pt I: Elementary, Pt 2: Advanced, never previously published.

3. Брусенцов Н.П. Воссоздание аристотелевой безукоризненной силлогистики. // Программные системы и инструменты. Тематический сборник № 11. М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2010. С. 88-91.

4. Развиваемый адаптивный язык РАЯ диалоговой системы программирования ДССП // Н.П. Брусенцов, В.Б. Захаров, И.А. Руднев, С.А.Сидоров, Н.А. Чанышев. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.

Опубликовано: Программные системы и инструменты. Тематический сборник № 12. М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2011. С. 23-26.