Метод целевого синтеза как инструмент постановки и решения задач о существовании из теории чисел

Седелев Б. В.

От автора

Метод целевого синтеза в первоначальном варианте был разработан автором в качестве конструктивного инструмента постановки и решения сложных задач эконометрии, а затем распространен на задачи теории чисел.

Для объектов указанных дисциплин характерна форма представления в виде понятий-вещей, определяемых совокупностью имеющихся в отношении них численных и теоретических знаний.

Поэтому составить “извне” – на основе гипотетико-дедуктивного метода, постулатов или систем аксиом адекватное представление о внутренней структуре и связях понятий-вещей столь же трудно, как угадать, что находится в руке у вопрошающего. Недаром указанный подход к познанию получил наименование метода “проб и ошибок”.

О подобных трудностях познания в теории чисел говорит и известная теорема Гёделя “о неполноте”: даже в богатых системах аксиом существуют истинные предложения, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть.

Более адекватным методом познания, включающим постановку и решение задач со смешанными (численными и теоретическими) знаниями, является синтез отвечающих цели исследования субъектно-предикатных предложений, их формирование “изнутри”.

Для ознакомления с теоретическими и прикладными аспектами метода целевого синтеза в эконометрических задачах (регрессионном анализе и прогнозировании временных рядов наблюдений и связывающих их многофакторных моделей) достаточно прочитать первую часть монографии автора “Оценка параметров и структуры экономических процессов” (М.: “Экономика”, 1985 г.). Что касается возможностей метода как инструмента постановки и решения глубоких и интересных задач теории чисел, то оценить их можно при прочтении данной работы.

Седелев Б. В., д. э. н.,
профессор экономико-аналитического института МИФИ,
выпускник мех.-мат. фак-та МГУ им. М. В. Ломоносова.

Обобщение числовой структуры и связей объектов из последней теоремы Ферма

На основе разработанной в рамках новой эконометрии методологии целевого синтеза построена математическая теория-гипотеза, обобщающая последнюю теорему Ферма.

Поскольку для совершенства познания
всё должно познаваться само через себя
(вещь есть то, что она есть, мнений же
о вещах – бесконечность), то пусть изуча-
ющий держится вещей, а не слов о вещах.
Ян Амос Коменский

Предисловие

В истории развития методов доказательства в математике анализ и синтез всегда сопутствовали и дополняли друг друга. Однако с конца XIX в. методы синтеза стали использоваться все реже, а анализ и формальные процедуры доказательства превратились в основной инструмент, обеспечивающий развитие математики.

Достигнутые с тех пор успехи математики несомненны, но не столь несомненно позитивным является указанное преобладание аналитических результатов над синтетическими. Ибо, доказывая истинность утверждений “если A, то B”, анализ нуждается в постоянном притоке нового знания о субъектах и предикатах высказываний. Обеспечить такой приток существенно нового знания может только синтез, имеющий своей целью расширять в каждом доказательстве понятие субъекта до охвата им понятия (нового) предиката.

Методы синтеза особенно актуальны в данный исторический период системного кризиса нашей цивилизации, преодолеть который можно только противопоставив темпам разрушительных тенденций не меньшие темпы получения новых обобщений и углублений научного знания и отвечающих им новых принципов и технологий взаимодействия человека и природы.

С тех пор, как Пьер Ферма (1601-1665 г.г.) сформулировал свою знаменитую теорему все последующие поколения математиков активно участвовали в попытках её доказательства. Среди участников были ученые и других специальностей. Так известный физик Вернер Гейзенберг признавался, что в молодые годы очень хотел доказать эту теорему. Известно также, что во всех без исключения обнародованных доказательствах были обнаружены ошибки.

Наконец, в 1993 г. британский математик Эндрю Уайлс, работающий в Принстоне (США), представил доказательство теоремы, признанное мировой математической общественностью безошибочным. По своей форме и средствам доказательство является сугубо аналитическим и сложным, а по объему - весьма большим. В первоначальном варианте оно занимало 200 с., а после учета замечаний о необходимости ряда уточнений возросло в 1996г. до 400 с. основного и 1200 с. так называемого инструктивного текста.

Предлагаемое в данной статье развитие вопроса, отправляясь как от исходной от поставленной в последней теореме Ферма проблемы несуществования у соответствующего уравнения целых положительных решений, сосредоточено на установлении условий существования таких решений у некоторой совокупности уравнений более общего вида и обосновании методов синтеза этих уравнений.

С этой целью была применена методология, разработанная автором для исследования сложных эконометрических задач, близких по своей постановке и логике решения к естественнонаучным. В условиях характерной для них недостаточности знаний получаемые решения неизбежно становятся гипотетическими.

Эти решения-гипотезы, конечно же, логически непротиворечивы, но главное в них это то, что они объясняют все известные нам факты существования предмета исследования и его свойства. Поэтому результаты доказательства признаются как истинные до тех пор, пока не найдутся такие новые факты, которые придут в противоречие с ними.

В такого рода решениях нуждаются не только естественные науки, но и математика, для которой они создают новые постановки задач и намечают пути их традиционного формально- логического решения. Последнее представляет собой лишь часть цепочки познания, от прочих звеньев которой зависит познавательная надёжность самого формально-логического звена.

Очень хорошо о характере и сути доказательства сказал известный математик, академик А.Д. Александров: "Доказательство - в практике, наблюдении, опыте, эксперименте и логическом выводе...

Будь готов пересмотреть свое даже основанное на доказательстве убеждение, если того требуют новые аргументы из того же арсенала средств доказательств"[1]

В данной статье учтены (в пределах указанного подхода) замечания по брошюре 1996г., сделанные специалистами МГУ им. М В. Ломоносова - кандидатом физ.-мат. наук, доктором эконом. наук, профессором Ю. Н. Черемныхом, доктором физ.-мат. наук, профессором В. С. Левченковым, кандидатом техн. наук Н. П. Брусенцовым, кандидатом физ.-мат. наук В. В. Лохиным. Всем им автор приносит глубокую и искреннюю благодарность.

Постановка задачи

Прежде всего докажем, что уравнение Ферма

$$x_1^n+x_2^n=y^n \qquad (1)$$

при $n\geq 2$ не имеет таких целых положительных решений (K_1, K_2, L), у которых хотя бы два числа были бы равными, т.е. либо $K_1=K_2$, либо $K_1=L$, либо $K_2=L$, либо $K_1=K_2=L$.

Предполагая противное, а именно, что $K_1=K_2$, получаем: $L=\sqrt[n]{2}K_2$. Откуда следует, что при $n\geq 2$ числа K_2 и L не могут быть целыми оба.

Анализ остальных случаев столь же очевидным образом приводит к отрицательным ответам на предположение о существовании указанных выше равенств.

Тем самым, проблема, поставленная в последней теореме Ферма, сводится к доказательству несуществования у уравнения (1) при $n>2$ решений, состоящих из различных целых положительных чисел.

Для этого достаточно доказать, что множество равенств

$$K_1^n+K_2^n=L^n \quad , n>2, \qquad (2)$$

состоящих из степеней различных целых положительных чисел K_1^n, K_2^n, L^n, не существует (является пустым).

Чтобы доказать это, достаточно установить необходимые условия существования для множества равенств более общего вида, а именно –

$$\sum_{i=1}^{k} K_i^n = L^n \text{ , } k>1,\ n\geq 2, \qquad (3)$$

и показать затем, что нарушение этих условий приводит к несуществованию равенств, частным случаем которых являются равенства (2).

Это означает, что основным (целевым) объектом исследования становятся

[1] Слово о науке, кн. 2, М.: Знание, 1986г., с.78

равенства (3), вопросы их существования и несуществования.

Поскольку степени различных целых положительных чисел в равенствах (3) являются не чем иным как ординатами точек степенной функции t^n с абциссами K_1, ..., K_k, L, то, чтобы решить указанную задачу в отношении равенств (3), достаточно решить ее для соответствующих точек степенной функции t^n.

Решение задачи

Первым возникает вопрос об адекватном поставленной задаче тождественном линейном представлении степенной функции t^n (нетривиальном представлении), так как ее тривиальное представление в виде $z=t^n$ для наших целей недостаточно.

Обратимся в связи с этим к некоторым различным целым положительным числам $N_1, ..., N_r$.

Построим с их помощью следующие степенные функции -

$$(t+N_1)^n,\ ...,\ (t+N_r)^n,\ n\geq 2, \qquad (4)$$

и будем их вместе с функцией t^n рассматривать на множестве $-\infty<t<+\infty$.

Известно, что при $r=n+1$ функции (4) образуют базис, по которому единственным образом может быть разложена функция t^n:

$$t^n \equiv \sum_{m=1}^{n+1} a_m (t+N_m)^n\ ,\ n\geq 2. \qquad (5)$$

Тождество (5) двуедино по своему смыслу. Во-первых, оно является единственной линейной связью различных сдвинутых по отношению друг к другу на целочисленные значения аргументов степенных функций. А во-вторых, при любом значении $t=0$, 1, 2, ... оно является линейной связью различных целых, положительных по координатам точек одной и той же степенной функции t^n.

Обращение к другим адекватным по своей форме поставленной задаче (т.е. линейным) представлениям функции t^n приводит либо *к* нарушению их единственности - при большем, чем в формуле (5) числе функций $(r>n+1)$, либо к невозможности самого тождественного линейного представления t^n – при меньшем, чем в (5) числе функций $(r<n+1)$.

Тем самым, получен интересующий нас линейный вариант определяющего свойства функции t^n: её любая точка может быть представлена в виде линейной комбинации $n+1$ других произвольных или специально выбранных её точек.

Каждая из функций базиса $(t+N_m)^n$, будучи порожденной из функции t^n сдвигом по аргументу, не может быть ортогональной по отношению к t^n на множестве $-\infty<t<+\infty$. Это подтверждается следующими выражениями -

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^n (t+N_m)^n dt \neq 0. \qquad (6)$$

Из неортогональности функций $(t+N_m)^n$ по отношению к t^n следует, что все коэффициенты разложения последней по первым в формуле (5) будут отличны от нуля:

$$a_m\neq 0,\ m=1,\ ...,\ n+1. \qquad (7)$$

Полагая в тождестве (5) $t=0$, получим для левой его части тривиальное равенство $0^n=0$, а для правой - нетривиальное равенство (линейную связь точек функции t^n):

$$\sum_{m=1}^{n+1} a_m N_m^{\,n} = 0,\ n\geq 2. \qquad (8)$$

От всех других нетривиальных равенств, которые получаются из правой части тождества (5) при $t=1,2,...$ и также связывают степени различных целых положительных чисел, равенства (8) отличаются тем, что имеют минимальное число членов, равное $n+1$

(у других $n+2$).

Нам неизвестно - существуют ли для произвольного n такие N_1, ..., N_{n+1}, которые позволяют с помощью тождественных преобразований перейти от равенств (8) к равносильным им равенствам с одинаковыми по величине коэффициентами -

$$\sum_{i=1}^{n} dK_i^n = dL^n \ , \ n\geq 2, \qquad (9)$$

где K_1, ..., K_n, L - те же самые числа N_1, ..., N_{n+1}, только иначе обозначенные. Если такие числа существуют, то равенства приобретают интересующий нас вид -

$$\sum_{i=1}^{n} K_i^n = L^n \ , \ n\geq 2. \qquad (10)$$

В то же время, из решения методом Крамера системы из $n+1$ линейных неоднородных уравнений, отвечающей тождеству (5) при $t=N_1$, ..., N_{n+1}, вытекает, что все определители, стоящие как в числителях, так и в знаменателях выражений для a_1, ..., a_{n+1}, будут целыми числами, а сами a_1, ..., a_{n+1}, - рациональными числами. Поэтому гипотеза о существовании равенств (9) и (10), возможная лишь в условиях единства числовой природы коэффициентов a_1, ..., a_{n+1}, (либо их рациональности, либо их пропорциональности одному и тому же иррациональному числу), не отвергается.

Вместе с тем, примеры равенств (10) для значений $n=2, 3$ -

$$3^2+4^2=5^2, \qquad 5^2+12^2=13^2,$$
$$1^3+6^3+8^3=9^3, \qquad 3^3+4^3+5^3=6^3 \qquad (11)$$

являются достаточным основанием для доказательства непустоты данного множества равенств: непустота множества - это существование хотя бы одного из принадлежащих ему равенств.

Сказанное означает возможность синтеза, а следовательно, и существования множества равенств (3) при условии $k=n$, $n=2,3,...$

Отмечая важность "возможности существования" предмета исследования (понятия о нем) для строгости и обоснованности проводимого доказательства, Лейбниц писал: "Разумеется, мы не можем безопасно строить доказательства о каком бы то ни было понятии, если не знаем, возможно ли оно, ибо из невозможного, или содержащего в себе противоречие, может быть доказало даже контрадикторное..."[2] И далее: "В свою очередь, установление гипотезы, или объяснение способа порождения, есть не что иное, как доказательство возможности предмета, даже если представляемый предмет зачастую не порождается этим способом..."[3] .

В связи с полученным результатом возникает естественное предположение, что равенства (3) при k=n как раз и являются наиболее интересным для нашей задачи случаем возможных равенств – с минимальным числом членов. Ведь если бы это оказалось так, то задача о существовании и несуществовании равенств (3) была бы успешно решена, поскольку равенства

$$\sum_{i=1}^{k} K_i^n = L^n, \ 1<k< n, \qquad (12)$$

были бы невозможны из-за того, что число членов в них меньше минимального.

В условиях единственности разработанного метода порождения нам оставалось бы логически продолжить начатое на его основе решение задачи. Однако могут существовать и другие адекватные поставленной задаче методы. Поэтому прежде следует установить полную группу адекватных методов порождения, в надежде на более глубокое проникновение в свойства интересующих нас равенств.

---

[2] Г.В. Лейбниц, Сочинения в 4 томах, том 3. М.: Мысль, 1984, с 118.

[3] Там же, с.119.

Обратимся с этой целью к хорошо известному в численном анализе методу, развитому около двух веков тому назад. Это метод построения интерполяционного полинома Лагранжа для некоторой функции $z=z(t)$ по ее r точкам $t=N_1, ..., N_r$ -

$$P_{r-1}(t)=z_1Q_1(t)+...+z_rQ_r(t), \qquad (13)$$

где $$Q_m(t)=\frac{F_r(t)}{F_r'(N_m)(t-N_m)},\ m=1, ..., r,\ F_r(t)=(t-N_1)...(t-N_r).$$

Для $z=t^n$ и $r=n+1$ формула Лагранжа (13) превращается в следующее тождество по t:

$$t^n\equiv N_1{}^nQ_1(t)+...+N_{n+1}{}^nQ_{n+1}(t). \qquad (14)$$

Полагая в формуле (14) $t=0$, получаем для ее правой части нетривиальное равенство

$$\sum_{m=1}^{n+1}\frac{(-1)^nN_1\ldots N_mN_{m+1}\ldots N_{n+1}}{(N_m-N_1)\ldots(N_m-N_{m-1})(N_m-N_{m+1})\ldots(N_m-N_{n+1})}N_m^n=\sum_{m=1}^{n+1}a_m(N_1\ldots N_{n+1})*N_m^n=0. \qquad (15)$$

Как и ранее, все коэффициенты a_m отличны от нуля. Поэтому равенство (15) имеет минимальное среди нетривиальных равенств $(t=1,2,\ldots$,кроме $t=N_1,..., N_{n+1})$ число членов, равное $n+1$(у других - $n+2$).

Поиск интересующих нас (целевых) равенств осуществляется посредством перебора образующих счетное множество векторов $(N_1,..., N_{n+1})$, $n=2,3...$

Так для $n=2$ и $N_1=3$, $N_2=4$, $N_3=5$ имеем:

$$t^2\equiv 3^2\frac{(t-4)(t-5)}{(3-4)(3-5)}+4^2\frac{(t-3)(t-5)}{(4-3)(4-5)}+5^2\frac{(t-3)(t-4)}{(5-3)(5-4).} \qquad (16)$$

При $t=0$ получаем равенство

$$0=3^2*10-4^2*15+5^2*6=10(3^2+4^2-5^2)-4^2*25+5^2*16=10*(3^2+4^2-5^2),$$

или $3^2+4^2=5^2$ (см. первый из примеров (11)).

Нами рассмотрен также случай $n=3$ и $N_1=1$, $N_2=6$, $N_3=8$, $N_4=9$ который приводит к тождеству:

$$t^3\equiv1^3\frac{(t-6)(t-8)(t-9)}{(1-6)(1-8)(1-9)}+6^3\frac{(t-1)(t-8)(t-9)}{(6-1)(6-8)(6-9)}+8^3\frac{(t-1)(t-6)(t-9)}{(8-1)(8-6)(8-9)}+9^3\frac{(t-1)(t-6)(t-8)}{(9-1)(9-6)(9-8)}. \qquad (17)$$

При $t=0$ получаем:

$$0=1^3\frac{54}{35}-6^3\frac{12}{5}+8^3\frac{27}{7}-9^3*2=\frac{1}{35}[54(1^3+6^3+8^3-9^3)+(-6^3*138+8^3*81-9^3*16)].$$

Учитывая равенство нулю второго из выражений, заключенных в круглые скобки, приходим к интересующему нас равенству $1^3+6^3+8^3=9^3$ (см. третий из примеров (11)).

Нетрудно убедиться, что для предложенного ранее метода порождения множества равенств (3) с помощью систем уравнений (в данном случае - системы, соответствующей $n=2$)

$$t^2=a_1(t+3)^2+a_2(t+4)^2+a_3(t+5)^2,\ t=3,4,5, \qquad (18)$$

и их решения методом Крамера, получаем следующее тождество -

$$t^2\equiv 10(t+3)^2-15(t+4)^2+6(t+5)^2. \qquad (19)$$

При $t=0$ его правая часть превращается в нетривиальное равенство $10*3^2-15*4^2+6*5^2=0,$ имеющее те же самые коэффициенты при степенях 3^2,4^2 и 5^2, что и у приведенного ранее равенства, полученного с помощью метода Лагранжа.

Имеет место и совпадение результатов для случая $n=3$ и $N_1=1$, $N_2=6$, $N_3=8$, $N_4=9$, полученных этими двумя методами.

В связи с этим приведем важное с методологической точки зрения обобщение, сделанное американским специалистом по численному анализу Р. В. Хеммингом: "...если дана $n+1$ узловая точка, то соответствующий многочлен степени n, проходящий через эти точки, однозначно определен, независимо от того, как он строится... Это необходимо подчеркнуть, потому что некоторые книги по численному анализу могли бы навести читателя на мысль, что разные формулы изображают разные многочлены, или из-за того, что они получены разными способами, или из-за различия в обозначениях"[4].

Нам остается дополнить это резюме тем, что любой полином, построенный по $r=n+1$ узловым точкам (N_1,N_1^n), ..., (N_{n+1},N_{n+1}^n), тождественно равен отвечающему поставленной задаче нетривиальному линейному представлению функции t^n.

Проведенное исследование возвращает нас к формуле (5), которая получает статус общей формулы порождения – для всего класса адекватных методов. Тем не менее, вопрос о завершении доказательства о равенствах (10) и (12) остается и нуждается в каких-то дополнительных средствах решения. Возможно, следует попытаться обобщить гипотезу Таниямы, положенную Э. Уайлсом в основу доказательства последней теоремы Ферма (на разработку этой гипотезы приходится основная часть указанных ранее 1600 с. его манускрипта).

Мы избрали иной, существенно более простой и краткий путь решения – основанный на разработанной ранее эконометрической методологии целевого синтеза в условиях недостаточности исходной информации по отношению к цели исследования. С ней подробно можно ознакомиться по приведенным в заключении работам автора, кратко – по последней из них.

Эта методология похожа по своим основным принципам и средствам на используемую в естественных науках. В результате её применения вместо формально-логического доказательства мы получаем эффективную теорию-гипотезу, которая не только непротиворечива логически и согласована со всеми известными эмпирическими фактами существования исследуемой вещи, но и обладает необходимыми прогностическими свойствами. Тем самым, мы переводим решение на путь реализации предпосланного данной статье эпиграфа.

Ещё логики-эпикурейцы говорили, что задача логики – точное рассуждение и изучение вещей, а не слов. О необходимости изучать понятия-вещи, а не понятия-слова, говорил В. И. Вернадский, обсуждая вопросы логики естествознания. Но не только в естествознании, но и в общественных науках и в математике встречаются понятия, первоначальный образ которых возникает в виде одного или нескольких эмпирических фактов – проявлений некоторого скрытого от нас, но объективно возможного явления. Его теоретическое осмысление и объяснение происходит позже – в связи с процессом синтеза эффективной математической теории соответствующего понятия-вещи.

Построить такую теорию для некоторого понятия-вещи – это прежде всего установить отвечающие ему целое и части (структуру вещи) и принципы их взаимосвязи: “Понимание вещей заключается в обнаружении истинного строения каждой вещи (это достигается, когда её существенные составные части приведены к соразмерности и взаимосвязанности)”.[5]

Нетрудно видеть, что соответствующее строение и взаимосвязи целого и частей исследуемого понятия-вещи (множества возможных равенств (3), отвечающих условиям r=n+1, t=0,1,…) были раскрыты в процессе синтеза нетривиального тождественного линейного представления функции t^n. Действительно, отвечающая ему формула (5) определяет структуру левой части (целого) через совокупность слагаемых (частей), находящихся в её правой части. Эта же формула заключает в себе и принципы взаимосвязи целого и частей: взятые вместе они обладают свойством линейной зависимости с ненулевыми коэффициентами, а только одним частям присуще свойство линейной независимости.

Именно данная структура и взаимосвязи целого и частей, представленные в

---

[4] Р.В. Хемминг, Численные методы. М.: Наука, 1968, с.104

[5] Я. А. Коменский, Избранные педагогические соч., в 2 томах, т. II, М: Педагогика, 1982, с. 367

формуле (5), устанавливают основные качественные и количественные характеристики математической теории исследуемого понятия-вещи, определяя, в частности, такой её показатель как условие возможности равенств с минимальным числом слагаемых k=n (r=n+1, t=0).

Отметим также, что разработка подобных математических теорий для понятий-вещей приводит к обобщению взгляда на них и следовательно даёт для чистой математики более общие и более глубокие новые постановки задач, что крайне важно для развития математики.

Наконец, логика познания, основанная на разработке математической теории, и фрагменты формальной логики чистой математики при исследовании понятий-вещей не противоречат, а дополняют друг друга, так же как и используемые парами методы синтеза и анализа, индукции и дедукции. Получаемое при их взаимодействии новое теоретическое знание будет иметь в зависимости от достаточности или недостаточности исходной информации об исследуемых вещах либо статус истины, либо теории-обобщения, носящей, как уже отмечалось, гипотетический характер. Чтобы отвергнуть последнюю, следует привести противоречащий ей, доселе неизвестный, эмпирический факт (вещь), т. е. установить, что нечто противоположное данному обобщению также возможно. После этого следует начать строить новую теорию, отвечающую более общему понятию о возможных вещах.

Обсуждая подобную логико-познавательную ситуацию, Лейбниц писал: "… существуют некоторые такие предложения, которые не только принимаются как вероятные, но и предполагаются истинными до тех пор, пока не показано противоположное, т. е. требуется указать на какое-то фактическое изменение, чтобы новые истины вызывали доверие".[6]

Итак, в соответствие с построенной математической теорией минимальное число членов у возможных равенств (3) определяется условием $k=n$. Если некоторая вещь существует, то она заведомо и возможна. Учтем также, что со слов "если существует" начинается формулировка необходимых условий существования любой вещи.

Таким образом, отвечающее условиям $r=n+1$ и t=0, равенство $k=n$ и условие непустоты являются необходимыми условиями существования равенств (3) с минимальным числом членов, и любой из указанного класса адекватных методов приводит в связи с ними к единому решению - о возможности существования равенств (10) и невозможности существования равенств (12). Чтобы возникла потребность в коррекции данных условий «требуется указать на какое-то фактическое изменение».

Данная (конкретная) методология может быть охарактеризована не только через раскрытие её собственной сути, но и указанием на её подчинённость такому специфическому направлению в методологии познания как теоретические методы: «Особенность теоретических методов в конкретных науках по сравнению с методами логики и математики надо видеть в том, что научная теория должна строиться в виде такой специфической логико-математической системы, которая ведёт к данным опыта, как к заранее известным, так и к новым.

Построение такой специфической системы без обращения к соответствующим философским идеям невозможно… К ним относятся, например, идеи объективности предмета научного исследования, наличия взаимосвязей явлений и причинно-следственной зависимости между ними…»[7]

Полученное решение задачи о синтезе математической теории, обобщающей структуру и свойства фигурирующих в последней теореме Ферма понятий-вещей, отражают две следующие теоремы.

<u>Теорема А</u>

[6] Г. В. Лейбниц, Указ. соч., с. 421.

[7] М. В. Мостепаненко, в кн. Методологические проблемы взаимосвязи и взаимодействия наук. Л.: Наука, 1970 г., сс. 111-112.

У уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^n = y^n \qquad (20)$$

при $n \geq 2$ возможны решения, состоящие из различных целых положительных чисел.

Теорема Б

У уравнений

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^n = y^n \qquad (21)$$

при $n>k>1$ невозможны решения, состоящие из различных целых положительных чисел.

Как следствие теоремы Б, устанавливается невозможность существования равенств (2), являющихся частным случаем равенств (12) при $k=2<n$. Это и есть последняя теорема Ферма, с некоторых вопросов о которой было начато данное исследование: уравнение $x_1^n+x_2^n=y^n$ при $n>2$ не имеет целых положительных решений.

Заметим, что лежащая в основе доказательства Э. Уайлса гипотеза Таниямы является иносказанием одного из свойств нетривиального тождественного представления функции t^n – трёхчленные равенства, связывающие степени целых положительных чисел, порождаются только при n=2.

Развитие задачи

Утверждение о существовании у уравнения

$$x_1^2+x_2^2=y^2 \qquad (22)$$

решений, состоящих из различных целых положительных чисел, образует с теоремой Ферма пару сопряженных теорем о "существовании-несуществовании" для трехчленных уравнений.

Представленные в формуле (11) примеры для $n=3$ наряду с доказанной невозможностью существования равенств (12) приводят к новой паре теорем о "существовании-несуществовании" - для четырехчленных уравнений.

Теорема В

Уравнение

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=y^3 \qquad (23)$$

имеет решения, состоящие из различных целых положительных чисел.

Теорема Г

Уравнение

$$x_1^n+x_2^n+x_3^n=y^n \qquad (24)$$

при $n>3$ не имеет решений, состоящих из различных целых положительных чисел.

Дальнейшая постановка задач о "существовании-несуществовании" и их решение в виде пар теорем типа "теорема В - теорема Г" зависит от существования примеров для следующих равенств -

$$\sum_{i=1}^{4} K_i^4 = L^4 . \qquad (25)$$

Очевидно, что теорема Б включает как частный случай не только теорему Ферма, но и теорему Г.

Что касается теоремы А, то она указывает направление поиска примеров равенств вида (11), а вместе с ними и доказательства теорем типа теоремы В.

Подстановка в формулу (5) значений $t=1,2,...$ приведет еще к одному множеству возможных равенств, связывающих степени $n+2$ различных целых положительных чисел, если будут указаны соответствующие примеры. Такие примеры действительно существуют-

$$1^2+4^2+8^2=9^2,\ 1^3+5^3+7^3+12^3=13^3. \qquad (26)$$

Это дает еще одну теорему о "возможности существования" (случай $k=n+1$).

Другим направлением развития задачи является обращение к равенствам с иными "интересными" значениями коэффициентов, например, с биномиальными. Для последних соответствующая задача синтеза практически решена, хотя она и не привлекала до сих пор внимания специалистов по теории чисел. По-видимому, это объясняется тем, что решена она средствами другой математической дисциплины - численного анализа.

В рамках же численного анализа хорошо известна так называемая разностная формула Лагранжа:

$$\Delta^r z(t) = \sum_{m=0}^{r} (-1)^{r-m} C_r^m z(t+m). \qquad (27)$$

Для $z=t^n$ и $r=n+1$ она превращается в следующее тождество по t:

$$t^n \equiv \sum_{m=1}^{n+1} (-1)^{m-1} C_{n+1}^m (t+m)^n. \qquad (28)$$

При t=0 правая часть формулы (28) превращается в нетривиальное равенство

$$\sum_{m=1}^{n+1} (-1)^{m-1} C_{n+1}^m m^n = 0 , \qquad (29)$$

связывающее степени различных целых положительных чисел от 1 до $n+1$.

Равенство (29) можно преобразовать к аналогичному формуле (9) виду, но с биномиальными коэффициентами. Понятно, что отвечающее этому равенству степенное уравнение с $n+1$ неизвестными имеет числа 1, ..., $n+1$ в качестве своего решения.

Невозможность соответствующего равенства для $r<n+1$ позволяет считать доказанной как теорему типа последней теоремы Ферма (для $к=2<n$), так и более общую теорему о "невозможности существования" (для $n>k>1$) .

Дальнейшее развитие задачи связано с переходом от степенных функций к показательным, что может представиться весьма радикальным шагом, но в действительности это не так.

Объяснение последнему можно найти в формуле (14), если учесть, что параметр n можно рассматривать как переменную $n=1,2,...$, а функции N_1^n, ..., N_{n+1}^n - как показательные функции с целыми основаниями. Понятно также, что в силу вывода этой формулы целые основания могут быть заменены на рациональные.

Заключение

Подводя итоги проведенного исследования, следует сказать, что все представленное в нём стало возможным благодаря развитой в рамках новой эконометрии[8] методологии целевого синтеза. С ее помощью автором были решены многие эконометрические задачи, близкие по постановке и логике решения к представленным в данной статье.

О возможностях этой методологии позволяет судить и то обстоятельство, что на ее основе получено решение другой известной проблемы теории чисел - Гольдбаха-Эйлера (о представлении четных чисел в виде сумм двух простых чисел). Ей будет посвящена отдельная статья.

Автор намерен также написать специальную работу по методологии и логике

[8] Основные труды автора по разработке новой эконометрии:

монографии - "Оценка распределенных лагов в экономических процессах", "Оценка параметров и структуры экономических процессов" (М.: Экономика, 1977 г., 1985 г.);

научные статьи - "Методологические основания эконометрии", “О логике получения надёжных новых знаний в эконометрии”, "Системные свойства объектов и принцип согласования в эконометрии" ("Известия Академии Наук СССР, серия экономическая", 1988 №2; 1990 №1; I99I №4).

получения новых синтетико-целевых знаний для широкого класса математических задач, в которой будут рассмотрены не только вопросы о том "как решать задачу" (Д. Пойа), но и о том как ставить задачу.

В настоящее время в математических доказательствах явно преобладают методы анализа, чего не было во времена создания современной математики в XVII-XVIII в.в., когда синтез использовался столь же часто, как и анализ, принося большую пользу для развития математики. Вот что писал по поводу анализа и синтеза Лейбниц - большой мастер и сторонник использования в доказательствах обоих этих, дополняющих друг друга методов: "Синтез имеет место тогда, когда, исходя из принципов и следуя порядку истин, мы обнаруживаем некоторого рода прогрессии и составляем особые таблицы или даже устанавливаем общие формулы, по которым затем могут быть найдены данные... При анализе же одна-единственная данная проблема возвращает нас к принципам так, словно бы до этого ни нами, ни кем-либо другим ничего не было открыто... Анализ в высшей степени необходим для практики, когда мы решаем встающие перед нами проблемы; с другой стороны, тот, кто в состоянии содействовать теории, должен упражняться в анализе до тех пор, пока не овладеет аналитическим искусством. Впрочем, было бы лучше, если бы он следовал синтезу и затрагивал только те вопросы, к которым его вел бы сам порядок, ибо тогда он продвигался бы вперед всегда приятно и легко, никогда не чувствовал бы затруднений, не обманывался бы успехом и вскоре достиг бы гораздо большего, чем сам вначале ожидал"[9].

После подготовки статьи к печати автор узнал о существовании отрицательного примера равенств (3) при $n=5$ и $k=4$.

Данный пример исключает из бесконечной области целочисленных переменных (n, k) единственную точку, не нарушая действенность принципов теории в остальных точках. Поэтому целесообразно свести коррекцию теории к положению, что есть не только правила, но и исключения из них.

В ситуации недостаточности исходной информации всегда будет потребность в коррекции теории по мере возникновения новых отрицательных данных. Однако, кардинальное преобразование теории необходимо лишь в случае, если новая информация существенно нарушит действенность (степень общности) принятых принципов.

Последовательность обоснования и коррекции теории-гипотезы представляет собой единственно конструктивную реализацию синтеза нового знания в условиях недостаточности исходной информации.

[9] Г.В. Лейбниц, Указ. соч., с.121-122

Доказательство теоремы Гольдбаха-Эйлера

Поскольку для совершенства познания
всё должно познаваться само через себя
(вещь есть то, что она есть, мнений же о
вещах – бесконечность), то пусть изучающий
держится вещей, а не слов о вещах.
Ян Амос Коменский

Чтобы понять природу, нужно внутренне заставить
её возникнуть во всей её последовательности.
Новалис

Введение

Минуло 260 лет с того времени, когда 7 июня 1742 года Христиан Гольдбах – российский академик, работавший в области математического анализа и теории чисел, – сформулировал в письме к Леонарду Эйлеру следующую проблему: “По крайней мере, кажется, что каждое натуральное число, которое больше двух, представляется в виде суммы трёх простых чисел”. Заметим, что тогда считали 1 простым числом. В ответном письме Эйлер высказал своё виденье вопроса: ”Каждое чётное число есть сумма двух простых”.

Именно это последнее утверждение и является ныне широко известной теоремой Гольдбаха-Эйлера, или, иначе, - общей теоремой Гольдбаха. Общей – поскольку, в случае её справедливости, теорема для нечётных чисел следует из неё с очевидностью (прибавлением к соответствующим представлениям чётных чисел 1, или, как принято теперь, - числа 3). Например: 2=1+1, 4=1+3=2+2, 6=1+5=3+3 и т. д.; следовательно – 3=(1+1)+1, 5=(1+3)+1=(2+2)+1, 7=(1+5)+1=(3+3)+1 и т. д. (Случай теоремы, отвечающий представлению чётных чисел в виде сумм трёх простых, самостоятельного интереса не представляет).

Почти два века теорему пытались доказать многие математики-профессионалы и любители, но безуспешно. Наконец, в 1937 г. академик И. М. Виноградов доказал её для случая весьма больших нечётных чисел, разработав с этой целью специальный метод тригонометрических сумм.

Метод оказался очень полезным для многих проблем аналитической теории чисел, но как вскоре выяснилось, - не для решения общей задачи. Иначе говоря, свойства привнесённого извне метода тригонометрических сумм не отвечали внутренним свойствам понятий-вещей из теоремы Гольдбаха-Эйлера.

Привлечение некоторого метода (фрагмента знаний) из внешних по отношению к исследуемому объекту соображений (пусть даже убедительных с позиций теории и практики развития данной области знания) может оказаться всего лишь мнением о его действительных свойствах, причём, как сказано в эпиграфе, мнением, число которых – бесконечность.

Такой подход к решению проблем – на основе привнесённых извне мнений-гипотез господствует ныне в математике в виде так называемой гипотетико-дедуктивной парадигмы. По своей сути она аналитична, а если и привлекает методы синтеза, то как нечто второстепенное.

Однако, в XVI – XVIII в. в. , когда формировались начала современной математики, синтез играл не менее существенную роль, чем анализ. Суть исследований представлялась не только в обеспечении логической строгости вывода, но и в глубине постижения свойств объекта, или, как тогда говорили, - его реквизитов.

Вот, что писали выдающиеся учёные и методологи того времени: “Ничего не может быть доказано ни о каком предмете…, чем в той мере, в какой мы постигаем реквизиты этого предмета”. [10] “Понимание вещей заключается в обнаружении истинного строения каждой вещи (это достигается, когда её существенные части приведены к соразмерности и взаимосвязанности)”.[11]

Поэтому, познание истинной структуры и свойств понятий-вещей, раскрывающих сущность общей теоремы, может быть осуществлено только на основе синтеза.

Постановка задачи

В память об авторах теоремы и с убеждением в правоте их творческой интуиции, будем решать задачу в формулировке Эйлера: “Каждое чётное число есть сумма двух простых”.

Тем самым, число 1, как это было прежде, так и в данной (аддитивной) задаче, считается простым. К совокупности простых чисел, которые будут использоваться для представления всех четных чисел, нами отнесены все простые числа, кроме p=2, т.е. $p_1=1$, $p_2=3$, $p_3=5$, $p_4=7$ и т. д.

На множестве отрицательных и положительных целых чисел

$t=\ldots-2,-1,0,1,2,\ldots$, определим следующую функцию –

$$X(t)=\begin{cases} 1, \text{ если } t=p_i,\ i=1,2,\ldots, \\ 0, \text{ если } t\neq p_i,\ i=1,2,\ldots\ . \end{cases} \qquad (1)$$

В данном случае имеет место определение не только по значениям, но и по смыслу: число 1 означает факт наличия, а число 0 – факт отсутствия простого числа при данном t.

Далее, определим с помощью операции сдвига по аргументу функции X(t) вправо на простые числа p_j, $j=1,2,\ldots$, следующие функции $X(t-p_j)$ –

$$X(t-p_j)=\begin{cases} 1, \text{ если } t-p_j=p_i,\ i=1,2,\ldots, \\ 0, \text{ если } t-p_j\neq p_i,\ i=1,2,\ldots\ . \end{cases} \qquad (2)$$

Из определения следует, что функции $X(t-p_j)$ имеют те же самые значения, что и X(t), но со сдвигом вправо по аргументу на p_j. Это означает, что они являются инвариантными по сдвигу по аргументу на простые числа.

Указанная, специфическая, инвариантность говорит о связи функций (2) с аналитически заданными, инвариантными по любому сдвигу по аргументу функциями – степенными полиномами, показательными функциями, линейными комбинациями синуса и косинуса одинаковых периодов.

Что касается смысла функций (2), то он раскрывается следующим образом. При $t-p_j=p_i$, или, иначе, при $t= p_j+p_i$ функции (2) равны 1, что отражает факт представления указанных чётных t в виде сумм двух простых чисел. При $t-p_j\neq p_i$ функции (2) равны 0, что отражает факт отсутствия соответствующих представлений для данных t.

Ввиду того, что нас интересуют факты существования и несуществования указанных представлений исключительно для положительных чётных чисел, в дальнейшем будем рассматривать значения функций (2) только при t=2, 4, …

Так, например, функция $X(t-p_1)=X(t-1)$ имеет в точках t=2,4,… следующие значения: X(2-1)=1, X(4-1)=1, X(6-1)=1, X(8-1)=1, X(10-1)=0 и т. д. Функция $X(t-p_2)=X(t-3)$ при t = 2, 4, … равна: X(2-3)=0, X(4-3)=1, X(6-3)=1, X(8-3)=1, X(10-3)=1, X(12-3)=0 и т. д.

Аналогично, для функции $X(t-p_3)=X(t-5)$ при t=2,4,… имеем: X(2-5)=0, X(4-5)=0, X(6-5)=1, X(8-5)=1, X(10-5)=1, X(12-5)=1, X(14-5)=0 и т. д.

[10] Лейбниц Г. В. Сочинения в 4 т. Т. 3. М. 1984. С. 441.
[11] Коменский Я. А. Избранные педагогические сочинения. В 2 т. Т. II. М. 1982. С.367.

На основе функций (2) построим следующую функцию –

$$G_n(t)=\sum_{j=1}^{n} X(t- p_j), \qquad (3)$$

и будем рассматривать её значения при чётных $t = 2, 4, \ldots$

Например, функция $G_3(t)= X(t-p_1)+ X(t-p_2)+ X(t-p_3)$ при $t = 2, 4, \ldots$ будет соответственно равна: $G_3(2)=1$, $G_3(4)=2$, $G_3(6)=3$, $G_3(8)=3$ и т. д. Это означает, в частности, что для $t=2,4$, или иначе говоря, для всех чётных чисел от 2 до p_3-1 включительно существуют представления в виде сумм двух простых чисел.

Подобно этому, о существовании представлений чётных чисел $t = 2, 4, \ldots, p_n-1$ в виде сумм двух простых чисел можно судить по соответствующим значениям функции $G_n(t)$.

В результате, мы пришли к следующей постановке задачи: требуется доказать, что для произвольного, сколь угодно большого n и отвечающего ему p_n функция $G_n(t)$ будет отлична от 0 при всех $t = 2, 4, \ldots, p_n-1$.

Решение задачи

Для решения задачи обратимся к уравнению $G_n(t)=0$ или, иначе, –

$$X(t-p_1)+ X(t-p_2)+ \ldots+X(t-p_n)=0 \qquad (4)$$

и постараемся ответить на следующие вопросы. Возможны ли у уравнения $G_n(t)=0$ корни в виде чётных значений t, а если возможны, то как соотносится минимальный из них с величиной p_n-1?

В этом плане интересен пример минимального чётного корня $t=28$ уравнения $G_2(t)=0$.

Решение задачи требует последовательного исследования свойств уравнения (4), методов определения его общего решения, установления связей последнего с функцией $G_n(t)$, наконец - выяснения указанной выше возможности существования таких чётных корней t уравнения $G_n(t)=0$, минимальный из которых даёт ответ на вопрос о его соотношении с величиной p_n-1.

Выражение (4) представляет собой линейное однородное уравнение в конечных разностях. Соответствующее ему характеристическое уравнение получается путём подстановки в (4) $X(t)=\lambda^t$ и учёта того обстоятельства, что $\lambda^{t-p_n}\neq 0$:

$$\lambda^{p_n-p_1}+\lambda^{p_n-p_2}+\ldots+\lambda^{p_n-p_{n-1}}+1=0, \text{ где } p_n-p_{n-1}\geq 2. \qquad (5)$$

Левая часть уравнения (5) является полиномом степени $p_n- p_1$. Все показатели степеней λ - чётные числа, а коэффициенты и свободный член – одного знака. Поэтому действительных корней у уравнения нет. Корни могут быть только комплексно-сопряжёнными и мнимыми сопряженными числами.

Это означает, что равносильной формой представления полинома является произведение квадратичных трёхчленов и двучленов. Наиболее вероятно, что все они входят в произведение в первой степени. Действительно, предположив у них более высокие степени, мы получили бы произведение новых полиномов-сомножителей с закономерно упорядоченными по величине коэффициентами. Это вступает в противоречие со свойствами исходного полинома в уравнении (5) (с равными между собой коэффициентами и свободным членом) и тем в большей мере, чем выше указанные кратности корней.

Поэтому исследование структуры и свойств общего решения уравнения (4) начнём со случая простых корней, а случай кратных корней отнесём на конец доказательства.

Итак, приравнивая каждый квадратичный полином 0, найдем его корни, по которым определим значения параметров r_i и T_i общего решения уравнения (4):

$$X(t)=\sum_{i=1}^{m} r_i^t(a_i \cos 2\pi t/T_i + b_i \sin 2\pi t/T_i),\ \text{где } m=1/2*(p_n- p_1), \qquad (6)$$

a_i и b_i - неопределённые коэффициенты.

Нетрудно видеть, что свойство инвариантности по сдвигу по t функции (6) обеспечивает (в результате её сдвигов и суммирования) для левой части формулы (4) тот же вид функции (6) с неопределёнными коэффициентами. Тем самым, функция $G_n(t)$ не только преобразуется в новую более общую форму, но и приобретает новое более глубокое и адекватное решаемой задаче содержание.

Поэтому, дальнейшему исследованию подлежит дискретно заданная (с шагом h=2) функция –

$$G_n (t)=\sum_{i=1}^{m} r_i^t(a_i'\cos 2\pi t/T_i + b_i'\sin 2\pi t/T_i),\ m=1/2*(p_n- p_1),\ t=2, 4,\dots,$$

или, что то же самое, -

$$G_n (t, c_1,\dots,c_m,\varphi_1,\dots,\varphi_m)=\sum_{i=1}^{m} c_i\, r_i^t \sin(2\pi t/T_i+ \varphi_i),\ m=1/2*(p_n- p_1),\ t=2, 4,\dots \qquad (7)$$

В отличие от исходной функции $G_n(t)$, t=2,4,…, которую можно изучать только численно, функция (7) определена аналитически, что позволяет исследовать её строго математически. К тому же, можно ожидать, что отвечающая ей, явная и более полная, информация будет достаточной для доказательства теоремы.

Выясним с этой целью, что нам известно о свойствах и параметрах функции (7).

Во-первых, являясь дискретно заданной, с шагом h=2, функцией, она имеет спектр, ограниченный частотой Найквиста $\omega_{max}=2\pi/T_{min}=2\pi/2h=2\pi/4$. Откуда следует, что минимальный период гармоник в формуле (7) $T_{i\ min}$ подчиняется условию –

$$T_{i\ min}\geq 4. \qquad (8)$$

Во-вторых, учитывая, что корни характеристического уравнения различные, будем иметь и различные периоды гармоник $T_1,\dots, T_m$. Не теряя общности, можно считать, что они удовлетворяют следующим неравенствам:

$$T_1> T_2>\dots> T_m\geq 4. \qquad (9)$$

В-третьих, наименьшим общим периодом гармоник функции (7) является наименьшее общее кратное – НОК($T_1,\dots, T_m$). Обозначив этот период через T, получаем –

$$T=\text{НОК}(T_1,\dots, T_m),\ m=1/2*(p_n-p_1). \qquad (10)$$

Известно, что численный анализ теоремы на основе функций, подобных (3), установил её справедливость для очень больших значений n и t. Полученная нами аналитическая форма функции $G_n(t)$ позволяет изучать проблему при произвольных, сколь угодно больших n, m и t.

Используя это, обеспечим тождественное равенство функции (7) значениям исходной функции (3) во всех точках $t=2,4,\dots, p_n- 1$ с помощью следующих условий:

$$G_n (t, c_1,\dots,c_m, \varphi_1,\dots,\varphi_m)= G_n (t),\ t=2,4,\dots, p_n- 1. \qquad (11)$$

При количестве неизвестных параметров, равном 2m, мы располагаем лишь m условиями ($p_n- 1=2m$).

Среди возможных способов определения неизвестных по условиям (11) мы выбираем наиболее подходящий для решаемой задачи метод обращения в 0 свободных переменных. В качестве последних выбираем $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$, а параметры $c_1,\ldots,c_m$ определим с помощью следующих равенств:

$$G_n(t, c_1,\ldots,c_m, 0,\ldots,0)= G_n(t),\ t=2,4,\ldots, p_n-1. \qquad (12)$$

В результате получена аналитическая, тождественно равная исходной при всех $t=2,4,\ldots, p_n-1$ функция -

$$G_n(t, c_1^*,\ldots,c_m^*)=\sum_{i=1}^{m} c_i^* r_i^t \sin 2\pi t/T_i,\ m=1/2*(p_n-p_1),\ t=2, 4,\ldots \qquad (13)$$

Её параметрами и коэффициентами являются различные иррациональные и рациональные числа.

Исследуем свойства функции (13). Первое, что необходимо, это охарактеризовать способ воздействия на функцию (13) единственного управляющего параметра $t=2,4\ldots$. Обращение данной функции в 0 при некотором t является результатом приведения её амплитуд и аргументов гармоник к соизмеримому (с точки зрения условия $G_n(t, c_1^*,\ldots,c_m^*)=0$) состоянию.

Понятно, что столь ограниченные возможности управляющего параметра $t=2,4\ldots$ делают задачу чрезвычайно сложной для большого количества чисел $c_i^* r_i$ и $2\pi/T_i$, которыми определяется состояние соизмеримости. Следовательно, если это состояние и достигается с ростом t, то заведомо при больших значениях t.

То же самое состояние (отвечающее тому же нулевому корню) может осуществиться при конкретных числах $2\pi/T_i$ и произвольных $c_i^* r_i$, или, что то же самое, за счёт одних периодов $T_1,\ldots, T_m$.

Это является прямым следствием равносильности задач о нулевых корнях, реализуемых на основе равенств (12) и новых равенств, получаемых из (12) с помощью умножения их правых частей на произвольные числа $d_t>0$,
$t=2,4,\ldots, p_n-1$.

Указанное состояние реализуется при достижении величиной t следующего значения:

$$t=T= \text{НОК}(T_1,\ldots, T_m),\ m=1/2*(p_n-1). \qquad (14)$$

При этом наиболее благоприятными в условиях данного управления ($t=2,4\ldots$) средствами достижения соизмеримости являются целочисленные значения $T_1,\ldots, T_m$. Это и означает реально возможную минимизацию величины t в условиях различных (см. неравенства (9)) и в целом неизвестных нам значений периодов гармоник. Будет ли при этом t выходить за пределы рассматриваемых значений $t=2,4,\ldots, p_n-1$ или нет, можно установить следующим образом.

Прежде всего покажем, что справедливо следующее условие:

$$\text{НОК}(T_1,\ldots, T_m)>2m. \qquad (15)$$

В соответствии с решаемой задачей нас интересует самое раннее значение t из возможных в условии (15).

Представим каждый из периодов в следующем виде –

$$T_i = \prod_{j\in\{i\}} p_j^{l_j},\ i=1,\ldots,m-1,\ T_m=p_1^2, \qquad (16)$$

где (только для данных представлений периодов) $p_1=1$ заменено на $p_1=2$. Тогда, при последовательном переходе от $\text{НОК}(T_m)= p_1^2$ к $\text{НОК}(T_{m-1}, T_m)$, от последнего – к $\text{НОК}(T_{m-2}, T_{m-1}, T_m)$ и т. д. до $\text{НОК}(T_1,\ldots, T_m)$ будет происходить многократное (порядка m раз) их возрастание – либо за счёт увеличения l_j, либо по причине появления нового p_j.

Указанный рост НОК будет более быстрым, чем увеличение числа периодов у этих НОК (происходящее по линейному закону и доходящее до m), а следовательно превзойдёт пропорциональную m величину 2m. Последнее и означает справедливость неравенства (15).

Далее, при имеющем место условии $m=1/2*(p_n-1)$, стоящая в правой части неравенства (15) величина $2m$ будет равна p_n-1. В результате получен ответ на поставленный ранее вопрос о возможности существования минимального чётного корня у уравнения $G_n(t)=0$. Такой корень возможен и он будет следующим образом соотноситься с величиной p_n-1:

$$t=T=\text{НОК}(T_1,\ldots, T_m)> p_n-1. \qquad (17)$$

Полученная оценка для t означает также, что все представления чётных чисел 2, 4, …, p_n-1 в виде сумм двух простых чисел существуют.

Применительно к случаю простых корней доказательство завершено.

Обратимся к задаче с кратными корнями. Единственная ситуация, которая при указанных ранее свойствах характеристического уравнения является возможной (хотя и менее вероятной, чем отвечающая простым корням), - это ситуация большого числа различных комплексно-сопряжённых корней невысокой (начиная с единичной) кратности.

Соответствующее выражение для G_n $(t, c_1^*,\ldots,c_m^*)$ будет отличаться от представленного в формуле (13) тем, что у некоторых из гармонических членов величины $c_i^* r_i^t$ заменяются на произведения $r_i^t P_{s(i)}(t)$, где $P_{s(i)}(t)$ – полиномы с коэффициентами c_i^*. (Их степени s(i) будут на 1 меньше кратностей соответствующих корней).

Это означает, что проблема обращения в 0 новой функции G_n $(t, c_1^*,\ldots,c_m^*)$ также становится наиболее простой, если она реализуется только за счёт различных целых чисел $T_1,\ldots, T_m$ (хотя величина m и имеет здесь несколько иную форму связи с p_n-1).

Поэтому проблема соизмеримости приобретает в случае кратных корней те же определяющие свойства что и в случае простых корней, и приводит к той же самой оценке НОК$(T_1,\ldots, T_m)$.

Тем самым, в полной мере остаются в силе и предложенная схема доказательства, и её логическая и инструментальная реализация, и сам вывод о справедливости теоремы Гольдбаха-Эйлера.

Заключение

Для решения данной задачи был применён метод целевого синтеза, развитый в научных трудах автора по эконометрии[12] и в работе, посвящённой проблеме обобщения последней теоремы Ферма[13].

Характерной особенностью метода является его направленность на познание вещей “самих через себя” – с проникновением в их структуру (целое и части) и свойства.

Если в задаче обобщения теоремы Ферма имела место ситуация недостаточности знаний об объекте, то в данной задаче знаний было достаточно. Однако аналитически – в рамках гипотетико-дедуктивной парадигмы – они (достаточные знания) не выявляются. Потребовалось синтезировать "во всей её последовательности" цепочку знаний о структуре и свойствах объекта и придать им такую форму, которая отвечает цели исследования.

Это говорит об актуальности развития метода целевого синтеза в различных областях математики – с целью дополнить господствующую гипотетико-дедуктивную парадигму соответствующими образцами метода.

Он особенно нужен для тех объектов, определяющие свойства которых не лежат на поверхности, а скрыты, и возможно, - достаточно глубоко.

---

[12] Монографии – “Оценка распределённых лагов в экономических процессах” (М. 1977), “Оценка параметров и структуры экономических процессов” (М. 1985); статьи – “Методологические основания эконометрии”, “О логике получения надёжных новых знаний в эконометрии”, “Системные свойства объектов и принцип согласования в эконометрии” //Известия Академии Наук СССР. Сер. “Экономическая”. 1988. №2; 1990. №1; 1991. №4.

[13] “Обобщение числовой структуры и связей объектов из последней теоремы Ферма". //Информационная математика. 2003. №1(3).

Как писал Лейбниц, - “Доказать всё, что мы выдвигаем, можно, я полагаю, лишь при условии досконального знания предмета, о котором идёт речь”[14].

Поскольку в каждом конкретном случае цель доказательства вполне определённая, то нуждаемся мы в доскональном знании лишь части свойств предмета – в так называемом достаточном (для данной цели) знании. Чтобы синтезировать это знание, необходим соответствующий метод (целевого синтеза). Истоки его лежат в трудах учёных указанного ранее периода XVI – XVIII в. в.

В своей конкретной форме, изложенной в работах автора, метод может обеспечить достаточное знание для многих задач аналитической теории чисел.

Автор намеревается опубликовать, со временем, результаты исследования одной интересной задачи, раскрывающей новые аспекты метода целевого синтеза применительно к математической дисциплине, с не меньшим богатством содержания своих объектов, чем в теории чисел, а именно – к теории функций вещественного переменного.

[14] Лейбниц Г. В. Указ. соч. С. 267.

Простое доказательство последней теоремы Ферма методом целевого синтеза.[15]

Чтобы понять природу, нужно
внутренне заставить ее возникнуть
во всей ее последовательности.
Новалис

Простота и краткость предлагаемого доказательства, с одной стороны, и четкая последовательность процедур порождения структуры и связей объекта, свойственная разработанному автором методу целевого синтеза[16], с другой стороны, послужили основанием представить материал статьи в виде этапов синтеза нового знания – от его начальной формы до целевой, раскрывающей во всей полноте сущность (природу) объекта исследования.

Доказательство последней теоремы Ферма, осуществленное в 1993-1996 гг. британским математиком Эндрю Уайлсом, имело исключительный объем: около 400 с. основного текста и 1200 с., так называемого, инструктивного текста.

Что касается формулировки теоремы, то она умещается в две строчки:

$$\text{уравнение} \qquad t^n + u^n = v^n, \tag{1}$$

при $n > 2$ не имеет целых положительных решений.

Перейдем к нашему доказательству теоремы методом целевого синтеза.

Известно, в частности, – из проведенного Литлвудом анализа теоремы, что ее достаточно доказать для простых n. Поэтому, в дальнейшем под n будем понимать простые числа.

1. Прежде всего, убедимся, что три целых положительных числа, среди которых хотя бы два равны между собой, не могут быть решением уравнения (1) при $n \geq 2$.

Действительно, положим с этой целью либо $t = u = N$, либо $t = v = N$, либо $u = v = N$, либо $t = u = v = N$, где N некоторое положительное целое число. Тогда в первом случае получаем $v = \sqrt[n]{2}N$, которое при $n \geq 2$ не может быть целым положительным числом. Во втором случае единственно возможным значением u будет 0, т.е. снова не целое положительное число. Рассуждая аналогичным образом убеждаемся, что все указанные случаи подтверждают в своей совокупности справедливость высказанного утверждения.

Это означает, что отвечающая цели доказательства область изменения переменных уравнения (1) при $n \geq 2$ может быть представлена в следующем виде:

$$0 < t < u < v \tag{2}$$

[15] статья опубликована в журнале «Информационная математика»: М. 2005, №1(5)

[16] Монографии – «Оценка распределенных лагов в экономических процессах» (М. 1977), «Оценка параметров и структуры экономических процессов» (М. 1985). Статьи – «Методологические основания эконометрии», «О логике получения надежных новых знаний в эконометрии», «Системные свойства объектов и принцип согласования в эконометрии» //Известия Академии Наук СССР. Сер. «Экономическая»: 1988, №2; 1990, №1; 1991, №4. «Обобщение числовой структуры и связей объектов из последней теоремы Ферма», «Доказательство теоремы Гольдбаха-Эйлера» //Информационная математика: М. 2003, №1(3); М. 2004, №1(4).

2. Вместе с тем, более адекватными задаче познания структуры и свойств уравнения (1) и существования у него целочисленных решений являются переменные t, $u = t + K$, $v = t + L$, где целые K и L удовлетворяют условию:

$$1 \le K < L, \tag{3}$$

а значения $n \ge 2$.

Им отвечает следующая форма уравнения (1):

$$t^n + (t+K)^n = (t+L)^n, \; n \ge 2 \tag{4}$$

3. Преобразуем уравнение (4) к полиномиальному виду –

$$P_n(t) = t^n - \sum_{i=1}^{n-1} C_n^i (L^i - K^i) t^{n-i} - (L^n - K^n) = 0, \; n \ge 2 \tag{5}$$

и будем смотреть на K и L как на произвольные, но фиксированные целые положительные величины из области (3), а на t – как на единственную переменную уравнения (5).

Именно в отношении степенных полиномов существует хорошо развитая теория, затрагивающая интересующие нас вопросы о положительности и целочисленности корней соответствующих уравнений.

4. Для $n = 2$ давно известен метод определения целых положительных решений уравнения (1) во всей их полноте. Однако его специальный характер практически ничего не дал для решения общей задачи.

Целью развиваемого нами метода для $n = 2$ является обоснование такой его формы, которая, с одной стороны, с очевидностью установила бы существование конкретных решений, а с другой – вскрыла бы сущность возможного подхода к общей проблеме.

5. Для любого полинома $P_n(t)$ с коэффициентом $a_n = 1$ и остальными целыми коэффициентами известно следующее необходимое условие существования целого положительного корня уравнения $P_n(t) = 0$: если такой корень существует, то он равен одному из целых положительных делителей коэффициента a_0 (включая 1 и сам свободный член).

Поскольку из существования чего-либо следует его возможность, то дальнейшее доказательство теоремы будем проводить относительно возможности-невозможности существования целых положительных корней уравнения (5) при $n = 2$ и $n > 2$. При этом, в первом случае корни могут иметь либо форму самих алгебраических делителей свободного члена уравнения, либо производных от возможных делителей конкретных решений – ведь существует (в конкретном виде) только то, что возможно (в общем виде).

В первом случае уравнения

$$P_2(t) = t^2 - 2(L-K)t - (L^2 - K^2) = 0 \tag{6}$$

делителями являются –

$$1, \; L-K, \; L+K, \; L^2 - K^2 \tag{7}$$

Убедимся, что первые два из них не могут быть целыми положительными t, обращающими в тождество уравнение (4) при $n = 2$:

$$t^2 + (t+K)^2 = (t+L)^2, \tag{8}$$

где K и L удовлетворяют условию (3).

Действительно, подставим 1 в уравнение (8), тогда –

- левая часть уравнения: $1+(1+K)^2$ (9)
- правая часть: $(1+L)^2 \geq [1+(1+K)]^2 = 1+2(1+K)+(1+K)^2$

что указывает на противоречие.

При подстановке $L-K$ имеем –

- левая часть уравнения: $(L-K)^2 + L^2$ (10)
- правая часть: $[(L-K)+L]^2 = (L-K)^2 + 2L(L-K) + L^2$

что также приводит к противоречию.

Для третьего делителя $L+K$ последовательно получаем:

$$(L+K)^2 + (L+2K)^2 = (2L+K)^2$$
$$(L+K)^2 = 3(L-K)(L+K)$$
$$L+K = 3L-3K\ ,\ L = 2K$$

В результате уравнение (8) принимает следующий вид –

$$(3K)^2 + (4K)^2 = (5K)^2, K = 1,2,3,... \qquad (11)$$

Этим доказана возможность существования целых положительных решений уравнения (8), отвечающих делителю $L+K$, где K и L удовлетворяют следующему конкретному случаю условия (3): $L = 2K > K \geq 1$.
Для четвертого делителя $L^2 - K^2$ будем иметь:

$$(L^2-K^2)^2 + (L^2-K^2+K)^2 = (L^2-K^2+L)^2\text{, или –}$$
$$(L^2-K^2)^2 = (L-K)[2(L-K)(L+K)+L+K]\text{, следовательно –}$$
$$L^2-K^2 = 2L-2K+1\text{, откуда –}$$
$$(L-1)^2 = (K-1)^2 + 1.$$

В том же частном случае условия (3), что и для третьего делителя, а именно для $L = 2K > K \geq 1$ и при $K = 1$ получаем $L = 2$. Подставляя их вместо K и L, приходим к тождеству $3^2 + 4^2 = 5^2$, которое после умножения обеих его частей на M^2 превращается в полный аналог формулы (11): $(3M)^2 + (4M)^2 = (5M)^2, M = 1,2,3,...$

Тем самым, доказана возможность существования целых положительных решений уравнения (8), отвечающих обоим данным делителям.

6. Покажем, что дальнейшее оперирование с третьим и четвертым делителями и условием (3) порождает в случае конкретизации их возможных численных вариантов следующее счетное множество различных целых положительных решений уравнения (8).

Итак, для делителей $L+K$ и L^2-K^2, конкретного вида условия (3) – $L = K+1$ и значения $K = 1$ будем иметь в качестве $t = 3$ – конкретный делитель обоих указанных делителей и следующее (уже знакомое нам) тождество $3^2 + (3+1)^2 = (3+2)^2$.

При том же условии $L = K+1$ и $K = 7$ будем иметь в качестве $t = 5$ – конкретный делитель тех же делителей $L+K$ и L^2-K^2, что дает – $5^2 + (5+7)^2 = (5+8)^2$.

Аналогично получаем:

$7^2+(7+17)^2=(7+18)^2$, $9^2+(9+31)^2=(9+32)^2$, $11^2+(11+49)^2=(11+50)^2$, $13^2+(13+71)^2=(13+72)^2$, $15^2+(15+97)^2=(15+98)^2$, $17^2+(17+127)^2=(17+128)^2$ и т.д.

При конкретном виде условия (3) – $L=K+2$ и $K=7,...$ будем иметь $8^2+(8+7)^2=(8+9)^2$, $12^2+(12+23)^2=(12+25)^2$, $16^2+(16+47)^2=(16+49)^2$ и т.д.

Понятно, что различных численных связей K и L в рамках условия (3) существует бесконечно много и их полных перебор возможен лишь потенциально.

Мы не стремились сделать данный метод столь же конструктивным, как и известный. Нашей целью было показать, что при $n=2$ синтез соответствующих уравнению (1) его новых форм в виде уравнений (8) и (6), а также отвечающих им целых положительных делителей $L+K$ и L^2-K^2 и условия (3) обеспечивает возможность существования данного вида конкретных решений; и одновременно выявляет те формы делителей, которые отвечают невозможности существования подобных решений.

7. Обратимся к значениям $n>2$ с соответствующими им уравнениями общего вида (1), (4), (5) и условиями (2) и (3).

Поскольку произвольным, но фиксированным v, u в уравнении (1), удовлетворяющим условию (2), отвечает единственный положительный корень t, интересно выяснить – сохраняется ли это условие для t в уравнении (5).

Применим к последнему правило Декарта: число положительных корней соответствующего уравнения не превышает числа перемен знаков у его коэффициентов. Так как их всего одна, то положительных корней либо нет (что является формальным результатом применения правила Декарта), либо только один (что находится в согласии с уравнением (1)).

Остается узнать – может ли этот единственный положительный корень быть целым.

Для этого обратимся к уже применявшемуся нами необходимому условию: так как в уравнении (5) коэффициент полинома $a_n=1$, а все остальные – целые величины, то положительный целый корень (если таковой существует) следует искать среди целых делителей коэффициента a_0, включая 1 и сам свободный член.

В рассматриваемом нами случае простых $n>2$ единственно возможными целыми положительными делителями свободного члена являются –

$$1,\ L-K,\ L^n-K^n, K^{n-1}+K^{n-2}L+...+KL^{n-2}+L^{n-1} \qquad (12)$$

Покажем, что все они приводят к противоречию при подстановке в уравнение (4).

Для первого делителя имеем –

- левая часть уравнения: $1+(1+K)^n$ (13)
- правая часть: $(1+L)^n \geq \left[1+(1+K)\right]^n = 1+\textit{положительные\_слагаемые}+(1+K)^n$, что указывает на противоречие.

Для $L-K$ получаем –

- левая часть уравнения: $(L-K)^n+L^n$ (14)

- правая часть: $\left[(L-K)+L\right]^n=(L-K)^n+\textit{положительные\_слагаемые}+L^n$ – что также приводит к противоречию.

Для третьего и четвертого делителей таких очевидных доказательств получить не удалось. Поэтому пришлось обратиться к следующей исторически сложившейся ситуации в отношении теоремы Ферма.

За долгие годы ее исследования были получены соответствующие доказательства для столь больших значений n, что осталось убедиться в справедливости теоремы не просто для больших а для сколь угодно больших n.

8. Сделаем это последовательно для третьего и четвертого делителей из формулы (12).

Итак, имеем –

- левая часть уравнения: $(L^n-K^n)^n+(L^n-K^n+K)^n$ (15)
- правая часть уравнения: $(L^n-K^n+L)^n$.

Проведем в отношении них следующие очевидные преобразования –

- левая часть: $1+\left[\left(1+\frac{K}{L^n-K^n}\right)^{\frac{L^n-K^n}{K}}\right]^{\frac{Kn}{L^n-K^n}}$ (16)
- правая часть: $\left[\left(1+\frac{L}{L^n-K^n}\right)^{\frac{L^n-K^n}{L}}\right]^{\frac{Ln}{L^n-K^n}}$.

Откуда, предел левой части при $n\to\infty$ равен 2, а правой части – 1. Т.е. опять имеем противоречие (невозможность существования соответствующего равенства).

Что касается непрерывности доказательства по n, то достаточно обратиться к установленному еще в 60-е годы прошлого века факту справедливости теоремы для $2<n\le 4002$ и осознать, что выражения с квадратными скобками являются по своей сути одной и той же, близкой к 1, величиной для всех $n>4000$.

Аналогичное доказательство для четвертого делителя основано на представлении последнего в виде дроби, в числителе которой стоит третий делитель, а в знаменателе – второй.

9. Исследование теоремы для случая $n=2$ – с установлением возможности порождения конкретных целых положительных решений уравнения (8) означает, что для уравнения (1) при $n\ge 2$ такие решения возможны.

Это важный момент доказательства, ибо, как писал Лейбниц, – «из невозможного, или содержащего в себе противоречие, может быть доказано даже контрадикторное»[17].

Указанная возможность придает доказательству теоремы Ферма – о невозможности существования целых положительных решений уравнения (1) при $n>2$ – необходимую логическую полноту и строгость.

[17] Г.В. Лейбниц. Сочинения в 4 томах, том 3, М. 1984, с 118.

Метод целевого синтеза как инструмент постановки и решения задач о существовании из теории чисел

Введение

В современной математике, в отличие от математики XVI-XVIII в.в., единственно строгим методом решения задач, или доказательства теорем признан гипотетико-дедуктивный метод. В соответствии с ним устанавливается истинность предложения в субъектно-предикатной форме, а именно - отвечающий цели решения задачи предикат с определёнными свойствами действительно присущ субъекту, содержащемуся в принятой системе аксиом, ранее доказанных предложениях и в гипотезах, принятых за истину.

В этом случае анализ становится основным методом доказательства действительной присущности предиката субъекту предложения. Этим же объясняется – почему многие математические дисциплины или их разделы имеют в своих названиях термин «анализ» (математический анализ, аналитическая теория чисел и т.д.). Понятно также, что современный профессиональный математик – это прежде всего аналитик.

В математике XVI-XVIII в.в. при исследовании объектов как «вещей вне нас» помимо анализа активно использовались методы синтеза и индукции (от последнего в современной математике фактически осталась процедура полной математической индукции, применимая, к сожалению, к очень узкому классу задач).

Если же оценивать в целом качества, необходимые современному математику для успешной работы в рамках гипотетико-дедуктивной парадигмы, то владение аналитическим искусством – не самое главное. Чтобы получать глубокие и важные результаты в отношение «вещей вне нас» (из теории чисел, регрессионного анализа временных рядов наблюдений и пр. дисциплин) необходимо также обладать творческим воображением и интуицией. Ведь нужно среди бесконечного числа возможностей угадать тот субъект A и ту систему аксиом, которая будет не только непротиворечивой , но и полной по отношению к поставленной цели – доказательству истинной присущности предиката B субъекту A.

Тем не менее, один из самых замечательных современных результатов теории чисел был получен указанным методом: академик И.М. Виноградов доказал в 1937г. так называемую частную (для нечётных чисел) теорему Гольдбаха.

Далеко не все попытки доказательств сложных теорем теории чисел, которые непрерывно делаются сообществом математиков, заканчиваются так успешно. И на то, кроме указанной трудности угадывания, есть некоторая общая для математического творчества причина. В 1931г. – австрийский математик и логик Курт Гёдель доказал теорему («о неполноте»), относящуюся, в частности, к интересующей нас теории чисел: даже в богатой системе аксиом имеются истинные предложения «если A, то B», которые в их рамках недоказуемы и неопровержимы.

Аналогичные негативные моменты господствующего в регрессионном анализе варианта гипотетико-дедуктивного метода – постулирования и проверки – обнаружены автором в трудах эконометриков западной школы. Наиболее острый характер они имеют в одной из самых интересных и сложных задач эконометрии – оценке априори неизвестного закона распределения вероятностей лагов (то же - определение весовой функции и памяти линейного дискретного фильтра, по коротким нестационарным временным рядам входа и выхода). Суть их – в смещённости оценок важнейших параметров искомого закона – математического ожидания и дисперсии лагов – на сколь угодно большую величину.

Сказанное объясняет, почему гипотетико-дедуктивные методы имеют следующее, второе, наименование – методы проб и ошибок.

Всё это направило автора в его трудах по эконометрии на путь возврата к почти забытому в XX в. методу синтеза , дополненному рядом новых для эконометрии принципов по установлению органической связи между численными и теоретическими знаниями в отношении временных рядов наблюдений как «вещей вне нас».

Отметим среди этих принципов два следующих. Это принцип инвариантности численных результатов расчётов по регрессионным моделям временных рядов при сдвигах этих рядов по оси времени. А также – принцип согласования свойств регрессионных моделей отдельных временных рядов и связывающих эти ряды уравнений множественной регрессии.

В результате был развит эконометрический вариант метода целевого синтеза, с которым можно познакомиться по работам автора за 1972-91гг.

В конце 80-х гг. автор осознал методологическую схожесть решённых им эконометрических задач с задачами теории чисел «о существовании» , также имеющих в качестве исходной информации смешанные (численные и теоретические) знания. Работа над рядом из них привела к созданию варианта метода целевого синтеза, адекватного структуре и свойствам объектов теории чисел как «вещей вне нас».

Методологические основания целевого синтеза в теории чисел

Обсуждение оснований метода начнём с общей схемы субъектно-предикатного предложения «если A(n), то B(n)»., в рамках которого осуществляется постановка и решение указанных задач теории чисел. Входящие в предложение субъект A(n) и предикат B(n) представляют собой математические понятия-вещи, зависящие по своим свойствам от параметра n, и образуют тем самым, некоторую последовательность более сложного характера, чем известные нам прогрессии и числовые ряды.

Именно с помощью субъектно-предикатного предложения выстраивается естественный порядок вопросов, раскрывающих какими должны быть A(n) и B(n)в задачах теории чисел «о существовании».

Будучи понятиями-вещами «вне нас», они могут оказаться возможными (и, следовательно, непустыми), невозможными (и, следовательно, пустыми) и существующими (во всей своей полноте).

Их определению с необходимой нам степенью строгости предпошлём следующее методологическое положение Лейбница: «Разумеется мы не можем безопасно строить доказательства о каком бы то ни было понятии, если не знаем, возможно ли оно, ибо из невозможного или содержащего в себе противоречие , может быть доказано даже контрадикторное…» И далее – «В свою очередь, установление гипотезы, или объяснение способа порождения, есть не что иное, как доказательство возможности предмета, даже если представляемый предмет зачастую не порождается указанным способом…» (эти слова Лейбница приведены также в первой статье).

Поскольку нашим методом является синтез, то есть порождение как необходимых нам понятий, так и основанных на них постановок и решений задач, имеющих вид субъектно-предикатных предложений, то необходимо осознать следующее. Возможность существования субъекта A(n), или предиката B(n) – это непротиворечивость их порождения с подтверждением их непустоты как понятий-вещей хотя бы одним численным примером.

Соответственно, невозможность существования A(n), или B(n) - это наличие противоречий в процедурах их синтеза, а следовательно и пустота этих понятий в виде отсутствия численных примеров их существования.

Существование A(n) и B(n) – это непротиворечивость их порождения и существование во всей полноте совокупности численных значений A(n) и B(n).

Возможные субъекты A(n) – самые общие основания для постановки и решения задач «о существовании» по схеме «если A(n), то B(n) », ибо могут непротиворечиво содержать в себе, как части, возможные, невозможные и существующие предикаты B(n). Единственное, интересующее нас противоречивое «содержание в себе» - это тождественность возможного субъекта невозможному предикату.

Имея своей целью придать методу целевого синтеза наиболее общий характер, необходимо в его схеме субъектно-предикатного предложения всегда иметь возможные субъекты A(n) и его возможные или существующие, а также невозможные части – предикаты B(n).

Поэтому возможность существования субъекта A(n) – это первое необходимое условие, которое должно быть соблюдено в методе целевого синтеза.

Следующий, определяющий для данного метода вопрос – о «полноте». Какому свойству (характеристике) субъекта может быть присуща «полнота», и что она означает для понятий – вещей?

Для аксиоматического метода, полнота – это достаточность принятой системы аксиом для решения задачи, или, иначе, - отсутствие потребности в её расширении за счёт новых аксиом. Именно таков смысл полноты в теореме Гёделя.

В то же время, в теории чисел с её объектами исследования в виде понятий – вещей, субъект A(n) должен представлять собой нечто «целое», в математической форме которого содержится вся полнота знаний о его структуре и отвечающих ей внутренних связях (целого и его частей).

Указанное целое – это второе необходимое условие возможного субъекта A(n), адекватное понятию его полноты как понятия-вещи – с функцией основания постановки и решения задачи методом целевого синтеза.

Что представляют собой конкретные субъектно-предикатные предложения с возможными и целыми субъектами A(n) и их частями – предикатами B(n) в трёх сложных задачах по теории чисел, будет обсуждено в следующем разделе.

Методологический комментарий к постановке и решению трёх задач теории чисел

Приступим к методологическому комментарию конкретных реализаций метода целевого синтеза в трёх интересных и сложных задачах теории чисел: «Обобщение числовой структуры и связей объектов из последней теории Ферма», «Доказательство теоремы Гольдбаха-Эйлера», «Простое доказательство последней теоремы Ферма методом целевого синтеза» (журнал «Информационная математика» - №1(3), 2003г.; №1(4),2004г.; №1(5), 2005г.).

Последовательность формирования субъекта, предиката и самого субъектно-предикатного предложения в первой задаче происходит «изнутри», начиная с обзора исходных численных и теоретических знаний о свойствах целых положительных решений обобщённого уравнения Ферма при $n \geq 2$. Читатель, внимательно прочитавший раздел «постановка задачи» и начальные две страницы раздела «решение задачи», может увидеть естественность развития процесса формирования «возможного и целого» субъекта – вначале в математической форме уравнения (5), а затем и в равносильной ей полиномиальной структуре (14).

Затруднения в отыскании последовательности перехода от математической формы субъекта к численной форме предиката в виде равенств (3) заставили автора «заполнить брешь незнания» принятием следующей гипотезы. А именно, - минимальное число членов в правой части равенств (3)совпадает с показателем степени (k=n).

Основанием для этого послужила согласованность указанных (общих) свойств субъекта и имевшейся в распоряжении автора совокупности численных знаний о существовании предиката. Естественно, что такая (гипотетическая по своей сути) согласованность не могла заменить теоретически обоснованной связи субъекта с предикатом. Но выбора не было и автор был вынужден согласиться на единственно возможный характер дальнейших построений в виде «теории - гипотезы».

Замечательной особенностью этих построений, осуществляемых методом целевого синтеза, явилось следующее их свойство – при появлении нового (отрицательного) численного примера указанная «теория - гипотеза» не теряла своей значимости, но только требовала скорректировать область её применимости, исключив одну точку (k=4, n=5).

Лейбниц высоко ценил конструктивные возможности синтеза, о чём свидетельствуют приведённые в конце первой статьи его слова о синтезе и анализе, с выводом о предпочтительности синтеза.

В указанной способности сохранять скорректированную теорию-гипотезу на будущее (до случая появления нового отрицательного примера) проявляется его преимущество над анализом. Последний в случае возможной (по Геделю) неполноты принятой системы аксиом также устанавливает теорию-гипотезу, недоказуемую, но и неопровержимую - до появления отрицательного примера. Однако эта теория-гипотеза рушится, как только такой пример обнаруживается.

Это позволяет автору заключить методологический разбор первой статьи признанием конструктивной ценности метода целевого синтеза как источника получения нового знания в сложных задачах о существовании из теории чисел. Причём, даже в тех случаях, когда исходных численных и теоретических знаний об объекте исследования недостаточно для порождения истинного субъектно-предикатного предложения «если A(n), то B(n)».

Принципиальным отличием второй задачи является достаточность имеющихся знаний для её решения методом целевого синтеза.

В разделе «постановка задачи» осуществляется синтез необходимой для задачи о существовании функции $G_n(t)$ для чётных $t=2,4,...,p_n-1$, где p_n – n-ое простое число в последовательности $p_1 = 1$, $p_2 = 3$, $p_3= 5$, …, p_n. Логика её формирования естественна и проста, если следовать общему, но от этого не менее конструктивному, принципу единства формы и содержания.

Указанное единство было реализовано через соответствие её ненулевых значений тем чётным t, для которых существуют их представления в виде сумм двух простых чисел, а её нулевые значения отвечали невозможности представлений чётных t в виде указанных сумм.

Численная реализация функции $G_n(t)$, $t=2,4,...,p_n-1$, позволила показать на примере существование минимального корня t уравнения $G_2(t)=0$, что его значение t=28 далеко выходит за правую границу области определения этой функции: $p_2-1=3-1=2$.

Это позволило осознать целевую установку на формирование возможного и целого субъекта в виде математической формулы $G_n(t, c_1, …, c_m, \varphi_1,...,\varphi_m)$ – общего решения уравнения в конечных разностях, с развёрнутой (аналитической) структурой указанной формулы.

Дальнейший синтез формы и отвечающих ей свойств субъекта был подчинён вытекающей из приведённого примера цели – убедиться, что те чётные t, которые соответствуют невозможности их представления в виде сумм двух простых (то есть отвечают нулевым значениям функции $G_n(t)$), также выходят за пределы области определения функции $G_n(t, c_1, …, c_m, 0…, 0)$ – $t=2,4, …, p_n-1$.

С этой целью была преобразована формула $G_n(t, c_1, …, c_m, 0…, 0)$ с ранее определёнными значениями параметров $c_1, …, c_m$ к такому её виду, который обеспечивал сохранения всех «невозможных» t при произвольных $c_1, …, c_m$. На этом был завершён синтез субъекта A(n).

В результате, возможность существования указанных t была поставлена исключительно в зависимость от параметров $T_1, …, T_m$ - периодов синусоидальных компонент субъекта, а точнее – от возможности считать их целыми и поэтому «опасно соизмеримыми» по отношению к чётным - $t=2,4, \ldots, p_n-1$.

Действительно, в этом случае нулевое значение субъекта в виде линейной комбинации синусоид с целыми периодами может прийтись на одно из указанных t, и впервые, если это будет, то на $t=НОК(T_1, \ldots, T_m)$.

Последнее выражение является не чем иным, как предикатом в математической форме B(n).

В свою очередь, вопрос о возможности целых периодов , в условиях полного отсутствия знаний о их действительных значениях, переходит в вопрос о нашем праве рассматривать их таковыми. Такое право основано на их целевой «опасности».

Дальнейшие простые выкладки показали, что чётное t, равное $НОК(T_1, \ldots, T_m)$, которому отвечает наибольшая опасность попасть в область $t= t=2,4, \ldots, p_n-1$, заведомо выходит за её пределы, а именно: $t=НОК(T_1, \ldots, T_m) > p_n-1$

В результате описанной схемы синтеза «изнутри» были сформированы отвечающие поставленной задаче субъектно-предикатные связи понятий-вещей по всей их непрерывной цепочке – от исходных численных и теоретических знаний до окончательного установления истинности предложения (теоремы) «если A(n), то B(n)».

Особенностью третьей задачи, посвященной последней теореме Ферма (ПТФ), является нетрадиционность цели её доказательства в виде невозможности существования целых положительных решений (ЦПР) у соответствующего уравнения при n>2. В силу чего данное уравнение Ферма не может служить «возможным и целым» субъектом в схеме доказательства истинности предложения «если A(n), то B(n)», где предикатом является именно невозможность существования субъекта.

Поэтому первоначально нужно было сформулировать такое понятие-вещь, которое могло быть субъектом A(n), с обязательно присущими ему свойствами – возможностью и целостностью.

Первым шагом к формированию субъекта A(n) с указанными свойствами является расширение области значений n от n>2, до $n \geq 2$. Действительно, новый субъект в виде уравнения Ферма при $n \geq 2$ становится возможным в отношении существования таковых у входящего в него уравнения при n=2.

Однако, уравнение с тремя переменными t, u, ν, став возможным при $n \geq 2$, не превратилось в целое понятие-вещь, не требующее каких-либо дополнительных знаний для решения задачи. Целым оно не может быть по причине отсутствия общего (теоретического) метода решения подобных уравнений (с несколькими неизвестными).

Единственная, развитая со всей возможной полнотой, теория относится к случаю полиномиальных уравнений с одним переменным. Чтобы воспользоваться её был осуществлён переход от трёх неизвестных (переменных t, u, ν) к одному неизвестному (переменному t) и двум «произвольным, но фиксированным» положительным целым числам K и L, удовлетворяющим условию $1 \leq K<L$.

Полученное уравнение при $n \geq 2$ стало одновременно и «возможным» и «целым», поскольку, во-первых, оно отвечает цели доказательства – о возможности существования у него ЦПР, и во-вторых, опирается на развитую теорию (полную с точки зрения той же цели доказательства).

У порождённого указанным образом уравнения, все коэффициенты – произвольные, но фиксированные целые числа, зависящие от K и L.

В этом случае теория позволяет (правило Декарта) установить число положительных корней уравнения по количеству перемен знаков у коэффициентов. Оказалось, что такой корень единственный.

Чтобы узнать – может ли этот положительный корень быть целым, следовало определить целые положительные делители свободного члена уравнения, равного разности степеней $L^n - K^n$. Поскольку при произвольных $n \geq 2$ число различных делителей указанного свободного члена является весьма неопределённым понятием, автор обратился к установленному известным английским математиком Литлвудом достаточному условию относительно n в ПТФ. А именно – в её доказательстве можно ограничиться только простыми степенями.

Для простых $n \geq 2$ свободный член всегда имеет четыре делителя, представленные в статье как для случая n=2, так и для n>2.

Случай уравнения Ферма при n=2 позволил автору продемонстрировать в полной мере возможности метода целевого синтеза по выявлению в составе возможного и целого субъекта двух его частей – возможной, отвечающей третьему и четвёртому делителям, и невозможной – для первого и второго делителя.

Интересным вопросом, внешне имеющем характер противоречия, является ситуация двух возможных (в качестве ЦПР) делителей, когда численных целых положительных корней только один.

Дело в том, что единственный численный целый положительный корень может непротиворечиво соответствовать двум делителям в их теоретической (алгебраической) форме. Именно такая процедура получения численных значений единственных при каждых конкретных значениях K и L корней, представлена в п.6 данной статьи.

Для последующего доказательства «невозможности» ЦПР и уравнения при n>2 потребовались два следующих этапа. На первом из них (см. п.7 статьи) была доказана методом прямой подстановки первого и второго делителей, их противоречивость в отношении того, чтобы стать ЦПР уравнения.

В отличие от этих делителей, доказательство противоречивости третьего и четвёртого делителей потребовало обращения к дополнительному численно-теоретическому знанию. Оно относится к установленному ещё в 60-е годы прошлого века факту невозможности существования ЦПР уравнения Ферма для значений $2 < n \leq 4002$ (в настоящее время правая граница неравенства существенно возросла).

Чтобы доказать для сколь угодно больших n противоречивость третьего делителя, уравнению была придана форма известного из курса математического анализа первого замечательного предела. Установленный в результате этого факт противоречивости указанной формы уравнения в действительности имеет место не только при $n \to \infty$, но и для значений n, начиная с правой границы неравенства $2 < n \leq 4002$.

Всё это позволяет говорить о противоречивости третьего делителя в качестве ЦПР уравнения при всех n>2.

Доказательство относительно противоречивости четвёртого делителя основано на его представлении в виде дроби $L^n - K^n$ / L - K и полностью повторяет предыдущее.

В завершающей части статьи были подчёркнуты определяющие полноту и строгость проведённого доказательства моменты. Их суть сводится к тому, что, синтез «возможного и целого» в отношении задачи о ЦПР уравнения Ферма при $n \geq 2$ обеспечил простоту доказательства истинного (непротиворечивого и полного) вхождения в данное уравнение двух его частей – возможного уравнения при n=2 и невозможного уравнения при n>2, ч.т.д.

Заключение: обобщающие соображения о методе целевого синтеза.

Метод целевого синтеза начал разрабатываться автором в результате неудовлетворённости негативными свойствами получаемых методом постулирования и проверки регрессионных моделей отдельных временных рядов и связывающих эти ряды многофакторных регрессионных моделей.

Одной из таких задач была задача о распределённых лагах, о которой говорилось в начале статьи.

Поэтому автор предположил, что исторически известные и неудовлетворительно решённые задачи эконометрии, а также такие известные и нерешённые задачи теории чисел как общая теорема Гольдбаха и ряд других относятся к таковым, прежде всего, по причине несоответствия их сложности ограниченным возможностям гипотетико-дедуктивного метода проникать извне в структуру и свойства субъектов и предикатов указанных задач.

Разработанный в результате решения задач со смешанными (численными и теоретическими) знаниями метод целевого синтеза оказался успешным именно благодаря подходу к их постановке и решению с позиций «изнутри». Его существенные преимущества проявились в открытом характере формирования понятий-вещей в виде субъектов и предикатов со свойствами либо только необходимыми (как в первой задаче), либо – необходимыми и достаточными(как во второй и третьей задачах) для доказательства по схеме субъектно-предикатных предложений «если A(n), то B(n)».

Тем не менее, как при подходе»извне» достичь успеха можно исключительно за счёт способностей исследователя угадывать «полную систему аксиом» (вспомним теорему Гёделя), так и при подходе «изнутри» с помощью метода целевого синтеза успешность исследователя предполагает наличие у него системных способностей и навыков распознавать «сущности» объектов. Прежде же всего – опыта углублённой и неспешной работы с задачами о существовании, где понятия не просто «язык и логика», т.е. понятия-слова, а «понятия-вещи» - с их сложной структурой и связями «целого и частей».

Для этого язык и логика исследователя, работающего с «вещами вне нас» на основе метода целевого синтеза, должны быть расширены за счёт таких характеристик понятий-вещей как «смысл», «сущность», «целое», «части», «общая структура бытия» - в виде определённых нами «возможности», «невозможности» и «существования» (во всей полноте численных реализаций соответствующего понятия-вещи). Короче говоря, исследователь обязательно должен уметь приводить к единству форму и содержание сложных задач о существовании со смешанными (численными теоретическими) знаниями об объектах исследования.

Поэтому, когда читатель-аналитик рассматривает и даёт оценку постановке и решению задач, полученных «изнутри» на основе синтеза, он обнаруживает, что привычная ему схема анализа не обеспечивает того их понимания, к которому он привык. Это создаёт определённые проблемы для плодотворного взаимодействия исследователей – синтетиков и аналитиков.

Тем не менее, разработанный метод проявил свои конструктивные возможности в сложных и глубоких задачах эконометрии и теории чисел, и автор надеется, что все исследователи, желающие ставить и решать подобные задачи из различных областей математики, оценят важность подхода «изнутри», реализованного в методе целевого синтеза.

Наконец, несколько слов об обобщающем характере метода целевого синтеза по отношению к упомянутому во введении методу полной математической индукции.

Обратимся с этой целью к идее доказательства истинной формы общего члена бесконечной числовой последовательности в виде арифметической или геометрической прогрессии методом полной математической индукции.

Доказательство проводится в два этапа. На первом этапе на основании численных данных формируется предполагаемая (возможная)математическая форма n-го числа A(n) и доказывается, что, если она истинная для n-го члена, то будет истинной и для n+1-го члена B(n)

Доказательство истинности субъектно-предикатного предложения «если A(n), то B(n)» на всей бесконечной последовательности её членов обеспечивается посредством подстановки численного значения первого члена в возможную математическую формулу общего члена A(n). Откуда из истинности (существования) первого члена следует истинность второго, и т.д. – вплоть до истинности общей формулы предиката B(n) для произвольного n.

Столь очевидная простота метода является следствием такой же простоты структуры бытия и связей членов числовых прогрессий.

В то же время, объекты теории чисел и отвечающие им понятия-вещи в виде субъектов A(n) и предикатов B(n)являются членами последовательностей со сложными структурами бытия и внутренних связей. Поэтому целевой синтез является по отношению к полной математической индукции обобщающим методом – общей, полной или неполной, математической индукцией.

Дальнейшее полезное для математики развитие метода целевого синтеза связано с переходом от объектов теории чисел к более общим и сложным объектам теории функций вещественного переменного, когда последние заданы совокупностью численных и теоретических знаний.

Всё, что рассказано автором о методе целевого синтеза, находится в согласии со взглядами известных математиков Р.Куранта и Г. Роббинса, высказанными ими около 40 лет тому назад в книге «Что такое математика?»: «Установить органическую связь между чистым и прикладным знанием, здоровое равновесие между абстрактной общностью и полнокровной конкретностью – вот как нам представляется задача математики в непосредственно обозримом будущем».