

## Трехзначное обобщение алгебры логики

Преодоление несовершенности ДНФ трехзначным обобщением логики.

Двухзначная булева алгебра недостаточна для отображения необходимого следования  $x \Rightarrow y$  – важнейшего логического отношения, представленного в естественном языке словосочетаниями: "Все  $x$  суть  $y$ ", "Все  $x$  необходимо присуще  $y$ ", "Сущность  $y$  целиком содержится в сущности  $x$ ", "Класс  $x$  является подклассом класса  $y$ , класс  $y'$  - подклассом класса  $x'$ ". Посредством символа эквивалентности "=" это отношение представимо рекурсивной  $x = xy$ . Однако в дизъюнктивной нормальной форме представление его неизбежно вырождается либо в эквивалентность  $(x \Rightarrow y) \equiv xy \vee x'y'$ , либо в парадоксальную "материальную импликацию"  $(x \supset y) \equiv xy \vee x'y \vee x'y'$ .

Неадекватность булевой алгебры обусловлена тем, что умалчивание членов ДНФ означает в ней исключенность (несуществование) их, тогда как в действительности наряду с исключенностью имеет место несущественность члена для отображаемого отношения. Так, в ДНФ-выражении отношения следования  $x \Rightarrow y$  член  $x'y'$  необходимо исключен, а член  $x'y$  игнорируется как несущественный. Если его исключить, возникнет тождество  $(x \Rightarrow y)$ , а если сохранить, то следование превратится в "материальную импликацию"  $(x \supset y)$ .

Ясно, что несущественность надо отличать от несуществования-исключенности. Кстати, в элементарных конъюнкциях это различие воплощено. Например, термин  $y$  в конъюнкции  $xzy$  утверждаем, в  $x'y'z$  отрицаем, а в  $xz$  умалчиваем как несущественный, не исключен, но и не необходим (возможен).

Аналогично, в ДНФ умалчиваться должны только несущественные члены, а исключенность надо обозначать специальным символом, например, кэрроловым индексом несуществования "0" [1, с. 255].

Отношение необходимого следования  $(x \Rightarrow y)$  в обобщенной таким образом булевой алгебре представимо в трехзначной ДНФ, выражением  $xy \vee xy'_0 \vee x'y'$ , в котором член  $x'y$  умалчивается как несущественный.

Материальная импликация  $(x \supset y)$  выражается этой же ДНФ, но без умолчания члена  $x'y$ :  $(x \supset y) \equiv xy \vee xy'_0 \vee x'y \vee x'y' \equiv \lceil xy' \equiv x' \vee y \equiv (x \Rightarrow y) \vee x'y$ .

В кэрроловом определении следования [1, с. 256]  $(x \Rightarrow y) \equiv x_1 \wedge xy'_0$  недостает члена  $y'_1$ , без которого отношение оказывается соблюденным при общезначимом  $y$  независимо от  $x$ ,

поскольку  $xu'_0$  у Кэррола означает несуществование  $xu'$ . Полноценным выражением будет  $(x \Rightarrow y) \equiv x_1 \wedge xu'_0 \wedge y'_1$ .

Но для реальных, сосуществующих с их противоположностями терминов  $x$ ,  $x'$ ,  $y$ ,  $y'$  кэрролово несуществование (nullity)  $xu'_0$  равнозначно несовместимости  $x$  с  $y'$ , обусловленной тем, что в  $x$  содержится  $y$ , а в  $y'$  содержится  $x'$ , т. е.  $x = xy$ ,  $y' = x'y'$ . Таким образом, в реальном универсуме Аристотеля кэрролово  $xu'_0$  вынуждает следование  $(x \Rightarrow y)(y' \Rightarrow x')$ .

Взаимосвязанность терминов порождается тем, что в сущности одного содержится сущность другого либо ее противоположность. Если  $x = xy$ , т. е. в  $x$  содержится  $y$ , то соблюдена  $xu'_0$  - несовместимость  $x$  с  $y'$ , означающая также  $y' = x'y'$ . Поэтому  $xu'_0 \equiv (x \Rightarrow y)(y' \Rightarrow x')$  - "Все  $x$  суть  $y$ ", "Все  $y'$  суть  $x'$ ", из  $x$  необходимо следует  $y$ , из  $y'$  необходимо следует  $x'$ , тогда как  $\neg xu' \equiv x' \vee y \equiv (x \supset y)(y' \supset x')$  - "материальная импликация", соблюденная при существовании  $y$  независимо от  $x$  и при несуществовании  $x$  независимо от  $y$ .

Наглядным примером является взаимосвязанность квадратности с прямоугольностью и равносторонностью четырехугольника. Все квадраты суть прямоугольники и ромбы, но ни прямоугольник, ни ромб еще не есть квадрат. Прямоугольность и равносторонность целиком содержатся в квадратности. Но не все прямоугольники и ромбы квадратны, квадратность не сказывается о них. Наоборот, прямоугольность и равносторонность необходимо присущи квадратам, сказываются обо всех них.

Аристотель ошибся, полагая что "одно целиком содержится в другом" означает то же, что "другое сказывается обо всем первом". [Первая аналитика, 24b26]. Но диалектическая трехзначность его силлогистики вопреки общепринятой догме исключенного третьего безупречна.

### *Литература*

1. Кэррол Л. Символическая логика. // История с узелками. – М.: "Мир", 1973.

Опубликовано: Н.П. Брусенцов, Ю.С. Владимирова. Аристотелева силлогистика в символической логике Льюиса Кэрролла. М: - Фонд «Новое тысячелетие», 2011. С. 5-6