

Владими́рова Ю.С.

Компьютеризация содержательного рассуждения на основе силлогистического вывода

Автоматизация достоверного рассуждения становится возможной при наличии непарадоксального выражения отношения содержательного следования $x \Rightarrow y$, которое имеется в силлогистике Аристотеля в виде общей посылки «*Всякое x есть y* » (Axy).

Предметом исследования силлогистики являются взаимосвязи между особенностями, выражающими присущность (x), либо антиприсущность (x') рассматриваемым вещам применимых к ним качеств [1]. Вещь может характеризоваться наличием одной либо одновременно нескольких особенностей. В последнем случае вещь обладает составной особенностью, выражающейся конъюнкцией несоставных особенностей. Например, вещи, обладающей составной особенностью $x'y$ одновременно присущ y и антиприсущ x . Особенность может быть для вещи несущественной, тогда характеристика вещи составляется посредством дизъюнкции особенностей, например, для вещи, обладающей особенностью $xy \vee x'y \equiv y$ особенность x несущественна. В общем случае сущность вещи характеризуется булевым выражением, составленным из несоставных особенностей.

Силлогистические посылки наглядно представляются выражениями алгебры суждений существования вещей, восходящей к методам диаграмм и индексов Льюиса Кэрролла [2]. Взаимосвязь, задаваемая силлогистической посылкой, определяется тем, какие из возможных в данном рассмотрении вещей необходимо существуют, какие не могут существовать при ее наличии, а какие могут как существовать, так и не существовать, т.е. возможны, но не необходимы. Для алгебраического выражения статусов вещей используются так называемые суждения существования: $\forall xy$ обозначает существование хотя бы одной xy -вещи, $\forall'xy$ – отсутствие всех таких вещей, приводящему статусу соответствует умалчивание сведений о данности вещи.

Одновременное существование либо несуществование различных вещей выражается конъюнкцией соответствующих суждений существования, существование какой-либо из вещей, либо всех сразу – их дизъюнкцией. Например, $\forall xy \forall'x'y'$ означает одновременное наличие xy -вещей и отсутствие $x'y'$ -вещей, $\forall x'y \vee \forall xy'$ – существование либо $x'y$ -, либо xy' -вещи, либо их обеих сразу.

Необходимым условием достоверности представления силлогистических посылок оказалась их подчиненность гераклитову принципу сосуществования противоположностей (ПСП) [1], заключающемуся в

допустимости рассмотрения особенности x только в том случае, если в наличии имеются как вещи, которым x присущ, так и вещи, которым x антиприсущ: $\forall x \forall x'$. Благодаря этому ограничению, из рассуждения исключаются такие абсурдные с точки зрения здравого смысла выводы, как следование чего угодно из безусловно ложного, а также следование из чего-либо всегда истинного.

Общая силлогистическая посылка «Всякое x есть y », тождественная отношению следования $x \Rightarrow y$, выражается конъюнкцией трех суждений существования, одно из которых означает несуществование вещей, одновременно обладающих качеством x и не обладающих качеством y ($x'y'$ -вещей), а два других – существование x - и y' -вещей:

$$x \Rightarrow y \equiv Axy \equiv V'xy' \forall x \forall y',$$

Частная посылка «Некоторые x есть y » характеризуется наличием x -вещей и выполнением ПСП:

$$Ix \equiv \forall xy \forall x' \forall y'.$$

За счет того, что в силлогистических суждениях употребляются особенности, обозначающие наличие либо отсутствие качеств, пропадает необходимость использовать отрицательные суждения «Ни один x не есть y » (E_{xy}) и «Некоторые x не есть y » (O_{xy}), рассматривающиеся в традиционной силлогистике, поскольку [3]:

$$E_{xy} \equiv Axy', \quad O_{xy} \equiv Ixy'.$$

Можно считать, что каждой особенности соответствует класс вещей – все вещи, обладающие данной особенностью. Например, особенности y' отвечает класс всех вещей, не обладающих y , т.е. обладающих особенностью «анти- y ». Тогда суждение существования $\forall xy$ можно понимать и как непустоту класса xy , а $V'xy$ – его пустоту. Такая интерпретация дает простые правила преобразования выражений алгебры суждений существования:

1. $V(xy \vee xy') \equiv \forall xy \vee \forall xy'$ – непустота класса вещей тождественна непустоте хотя бы одного его подкласса;
2. $V'(xy \vee xy') \equiv V'xy \vee V'xy'$ – если класс пуст, пусты все его подклассы;
3. $\forall x V'xy' \equiv \forall xy V'xy'$ – если класс непуст, но один из его подклассов пуст, дополнение этого подкласса непусто;
4. $\forall xy \Rightarrow \forall x$ – из непустоты подкласса следует и непустота охватывающего его класса вещей.

Применение этих правил дает алгебраические выражения всех модусов силлогистики. Например, согласно второму правилу,

$$V'xyz V'xy'z \equiv V'(xyz \vee xy'z) \equiv V'xz$$

осуществляется исключение среднего термина y , а, например, модус *barbara* получается следующим образом:

$$\begin{aligned} Axy Ayz &\equiv (V'xy' \forall xy \forall x'y')(V'y'z' \forall yz \forall y'z') \equiv \\ &\equiv V'xy' V'y'z' \forall xy \forall x'y' \forall yz \forall y'z' \equiv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \forall x'y'z \forall x'y'z' \forall x'yz' \forall x'yz' \forall xy \forall x'y' \forall yz \forall y'z' \equiv \\
&\equiv \forall x'y'z \forall x'y'z' \forall x'yz' \forall x'yz' \forall xyz \forall x'y' \forall yz \forall x'y'z' \equiv \\
&\equiv \forall (x'y'z \vee x'y'z' \vee x'yz' \vee x'yz') \forall xyz \forall x'y' \forall yz \forall x'y'z' \equiv \\
&\equiv \forall (x'y' \vee xz' \vee yz') \forall xyz \forall x'y' \forall yz \forall x'y'z' \equiv \\
&\equiv \forall xy \forall xz' \forall yz' \forall xyz \forall x'y' \forall yz \forall x'y'z' \Rightarrow \forall xz' \forall xz \forall x'z' \equiv Axz.
\end{aligned}$$

Традиционная силлогистика ограничивается исследованием отношений между несоставными особенностями, каждая из которых соответствует наличию либо отсутствию у вещи только одного качества. Очевидно, что алгебра суждений существования допускает выражение отношений между составными особенностями, представленными произвольными булевыми выражениями и нахождение взаимосвязей между такими особенностями. Общая и частная посылки определяются в случае составных особенностей по тому же принципу, что и для несоставных.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ и $g(x_1, \dots, x_n)$ – булевы выражения, соответствующие составным особенностям f и g , где x_1, \dots, x_n – несоставные особенности, задающие универсум рассмотрения, для которых соблюдается ПСП:

$$\forall x_1 \forall x_1' \dots \forall x_n \forall x_n'$$

Как и в случае несоставных особенностей, следование g из f $f \Rightarrow g$ имеет место, если всякая f -вещь является одновременно и g -вещью, т.е. не существует вещей, которым была бы одновременно присуща f и не присуща g , существуют f -вещи и существуют вещи, не обладающие особенностью g .

Отсутствие у вещи несоставной особенности x представляет собой ее инверсию x' . Для того, чтобы выразить отсутствие у вещи составной особенности g , будем считать, что выражение g приведено в СДНФ. Тогда всякая вещь, особенность которой выражается индивидуальной конъюнкцией, входящей в число индивидуальных конъюнкций g , либо дизъюнкцией нескольких таких конъюнкций, будет обладать и особенностью g . Напротив, все вещи, особенности которых выражаются индивидуальными конъюнкциями, не входящими в СДНФ g , либо их дизъюнкцией, не обладают особенностью g . Таким образом, не обладают особенностью g вещи, характеризующиеся особенностью \bar{g} , обозначающей дополнение g до универсума.

Аналогично, сущность вещей, которым присуща особенность f и не присуща g , можно выразить как $f\bar{g}$, считая f и g приведенными в СДНФ.

Это означает, что общая посылка «всякое f есть g » выражается следующим образом:

$$Afg \equiv \forall f \bar{g} \forall f \bar{g} \text{ ПСП}(x_1, \dots, x_n).$$

Подобными рассуждениями можно также показать, что

$$Afg \equiv V' f \bar{g} \forall f \bar{V} g \text{ ПСП}(x_1, \dots, x_n) \equiv V' f \bar{g} \forall fg \bar{V} f \bar{g} \text{ ПСП}(x_1, \dots, x_n).$$

Пример общей посылки, связывающей составные особенности: «всякий треугольник, содержащий прямой угол является неравносторонней фигурой». Эта взаимосвязь имеет место, поскольку не существует фигур, являющихся треугольниками с прямым углом, и при этом равносторонних. Пусть x означает «быть треугольником», y – «содержать прямой угол», z – «быть равносторонним». Тогда не существует xyz -вещей, но существуют как xuz' -вещи, так и вещи, не являющиеся xu -, но обладающие особенностью z , т.е. $\bar{x}yz \equiv (x' \vee y') z$:

$$V'xyz \forall xuz' \forall (x' \vee y') z.$$

Суждения существования в данном выражении утверждают наличие всех несоставных особенностей, поэтому ПСП(x, y, z) соблюден. Полученное выражение означает, что треугольник с прямым углом (xu -вещь) не может быть равносторонним (z' -вещью). С другой стороны, в силу контрапозитивности отношения следования, если имеется равносторонняя фигура (z -вещь), то можно сказать, что либо она не треугольник (т.е. есть x') и может содержать прямой угол (быть y -вещью), либо не содержит прямой угол (есть y') и может быть треугольником (быть x -вещью).

Частное силлогистическое суждение, задающее взаимосвязь между составными особенностями Ifg выражается аналогично:

$$Ifg \equiv \forall fg \bar{V} f \bar{V} g \text{ ПСП}(x_1, \dots, x_n).$$

Получение силлогистического вывода осуществляется так же, как и для несоставных особенностей: исходные посылки конъюнктивно совмещаются, и в полученном выражении отыскиваются взаимосвязи между исследуемыми особенностями, в то время как особенности, несущественные для рассмотрения, элиминируются.

Каждая исходная посылка имеет вид

$$V'FVG_1VG_2 \text{ либо } VG_1VG_2VG_3,$$

где F, G_1, G_2, G_3 – булевы выражения. Кроме того для произвольных булевых выражений f и g

$$V'f \bar{V}g \equiv V'(f \vee g),$$

а $\forall f \bar{V}g$ в общем случае нельзя привести к одному суждению существования. Поэтому, выражение, получаемое в результате конъюнкции исходных посылок, имеет вид:

$$V'PVQ_1VQ_2\dots VQ_b,$$

где $P \equiv p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_k$ и $Q_i \equiv q_{i1} \vee q_{i2} \vee \dots \vee q_{im}$ – соответствующие СДНФ, p_i и q_{ij} – их индивидуальные конъюнкции. По правилу 3, если часть непустого класса пуста, то остальная его часть обязана быть непустой. Тогда из всех Q_i могут быть исключены индивидуальные конъюнкции, содержащиеся в P , – вещи, обладающие особенностями p_i , не существуют. В то же время ни из одной особенности Q_i нельзя изъять таким образом

все конъюнкции, т.к. в этом случае одна из исходных посылок перестанет удовлетворять ПСП.

Заметим, что интерпретация выражений P и Q_i неодинакова: каждое выражение Q_i обозначает лишь существование вещи, обладающей особенностью Q_i , но не существование каждой вещи, охарактеризованной любым q_{ij} . Последние находятся в третьем-привходящем статусе, они лишь возможны, но не даны. Вместе с тем несуществование вещей, обладающих P говорит о несуществовании каждой вещи с особенностью p_i .

Пусть требуется установить, имеется ли в условиях, заданных указанной системой посылок, взаимосвязь между двумя составными особенностями $u(x_1, \dots, x_n)$ и $v(x_1, \dots, x_n)$. Наличие в $P(x_1, \dots, x_n)$ подвыражения uv , говорит о том, что имеет место Auv , наличие iv – о том, что Aiv , наличие \bar{iv} доказывает $A\bar{iv}$, данность \bar{iv} – Aiv . Если же ни одного из этих четырех подвыражений в P нет, то общего заключения нет, т.е. отношением следования u и v не связаны. Но возможны частные заключения: Iuv , $Iu\bar{v}$, $I\bar{u}v$ или $I\bar{u}\bar{v}$; для их выявления следует отыскивать среди выражений Q_i такие, которые, являются подвыражениями одного из четырех: uv , iv , \bar{iv} или $\bar{u}\bar{v}$. Так как вещи, обладающие особенностью Q_i , существуют то существуют также и вещи, обладающие особенностью, отвечающей СДНФ, содержащей Q_i как подвыражение. Например, если какое-либо из Q_i равно индивидуальной конъюнкции, входящей в СДНФ uv , то можно сделать вывод, что раз непуст подкласс uv , то непуст и весь этот класс, и имеет место частное суждение Iuv .

Программная реализация силлогистического вывода основывается на представлении составных особенностей – булевых выражений в СДНФ, соответствующими 2^n -битными шкалами, в которых битами сопоставлены в определенном порядке индивидуальные конъюнкции. Определить, является одно выражение подвыражением другого, можно побитной конъюнкцией шкалы, соответствующей первому выражению со шкалой, представляющей дополнение второго выражения.

Пример. Пусть имеются две посылки $A(xy)z'$ и $A(xy')z$, требуется проверить, как взаимосвязаны особенности x и z .

$$A(xy)z \equiv V'xyz \ Vxyz' \ V(x' \vee y')z \ VxVx'Vy'VzVz',$$

$$A(xy')z' \equiv V'xy'z \ Vxy'z' \ V(x' \vee y)z' \ VxVx'Vy'Vz.$$

$$A(xy)z \ A(xy')z' \equiv$$

$$\equiv V'(xyz \vee xy'z) \ Vxyz' \ V(x' \vee y')z \ Vxy'z' \ V(x' \vee y)z' \ VxVx'Vy'VzVz'.$$

Шкала для $P(x, y, z) \equiv (xyz \vee xy'z)$ равна 00000101, где младшей (правой) единице соответствует индивидуальная конъюнкция xyz . Аналогично представляются шкалы для $Q_i(x, y, z)$: выражению $Q_1(x, y, z) \equiv xy'z'$ соответствует шкала 00000010, выражению $Q_2(x, y, z) \equiv (x' \vee y')z$ – шкала 01010100 и т.д. Предположим, что особенности x и z' связаны отношением «Всякое x есть не- z » (Axz'), тогда выражение xz должно быть под-

выражением $P(x, y, z)$. Шкала 00000101, представляющая xz совпадает со шкалой для $P(x, y, z)$, т.е. отношение Axz' в условиях, заданных посылками, выполняется.

Литература

Брусенцов Н.П., Владимирова Ю.С. Конструктивная компьютеризация силлогистики // Математические методы распознавания образов. ММРО-13. – М.: МАКС-Пресс, 2007. С. 10-13.

Кэрролл Л. Символическая логика // Льюис Кэрролл. История с узелками. – М.: «Мир», 1973, с.189-361.

Брусенцов Н.П. Исчерпывающее решение «неодолимой» проблемы парадоксов. – М., Фонд «Новое тысячелетие», 2008. – 8 с.

Опубликовано: Программные системы и инструменты № 12. Под ред. Л.Н. Королева. – М.: Издательский отдел ВМиК МГУ, 2010. С. 92-97.